Vektorové prostory se skalárním součinem – vektory kolmé, pokud $\langle x|y\rangle=0$

ortonormální báze - $\langle u_i|u_j\rangle$ =1 když $i=j$; =0 když $i\neq j$

pak $\forall\ u\in V$ platí $u=\sum_{i=1}^{n}\langle u|u_i\rangle u_i$

projekce do vektorového prostoru W $P_W(u)=\sum_{i=1}^{m}\langle u|v_i\rangle v_i$; $\forall\ v$ platí $\langle u-P_W(u)|v_i\rangle=0$

<u>Gram-Schmidtova ortonormalizace</u>: z libovolné báze $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ spočte ortonormální bázi $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

pro i=1, 2, …, n: $v_i=x_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i|y_j\rangle y_j$, $y_i=\frac{v_j}{\|v_j\|}$ Dk: indukce – odečtena projekce > kolmé...

<u>Důsledek</u>: Je-li W podprostor VP V konečné dimenze, pak lze každou ortonormální bázi W rozšířit na OnB V

Dk: Steinitzova věta o výměně; ortonormalizace

Nechť W je ,mpžina vektorů VP V. Pak <u>ortogonální doplněk W</u> je množina $W^{\perp}=\{x\in V|\ \forall v\in W\colon\ x\perp v\}$

<u>Tvrzení</u>: Nechť W je podprostor VP V konečné dimenze, potom platí

$W^{\perp}$ je podprostor Dk: Ukázat uzavřenost na sčítání a násobení

Dim(W)+Dim($W^{\perp}$)=Dim(V) Dk: Báze W $\{x_1, \ldots, x_m\}$, báze $V\{x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n\}$, dokázat ≤, ≥

$W\wedge W^{\perp}=\{0\}$ Dk: Pro spor existuje... lineární kombinace, ale mají být kolmé...

$(W^{\perp})^{\perp}=W$ Dk: Oboje navzájem kolmé s $W^{\perp}$; součet dimenzí...

Čtvercová matice A je ortogonální, pokud platí AA^{T}=I A^{T} je ortogonální <=> $A^{-1}=A^{T}$

Množina všech permutací na {1, 2, …, n} s_n

<u>Inverze permutace p</u> – (i, j) – $i<j$ a $p(i)>p(j)$ (~ dvojice křížících se šipek)

Množina všech inverzí permutace p I(p)

Znaménko permutace – sgn(p)=$(-1)^{|I(p)|}$

<u>Tvrzení</u>: Pro každé p, $q\in s_n$ platí sgn($p\circ q$)=sgn(p) sgn(q) Dk: ???

A je čtvercová matice nxn nad tělesem T, pak <u>determinant matice A</u> je číslo det(A)= $\sum_{p\in s_n}\operatorname{sgn}(p)\cdot\prod_{j=1}^{n}a_{j\,p_j}\in T$

<u>Tvrzení</u>: det(A)=det(A^{T}) Dk: sgn(p)=sgn(p^{-1}); rozpis...

<u>Tvrzení</u>: Přerovnání sloupců matice podle permutace q ovlivní pouze znaménko a to pouze, je-li sgn(q)=-1

Dk: det(A')=$\sum$sgn(p)$\prod a_{i\,q-1(p(i))}$=$\sum$sgn(q)sgn(q^{-1})sgn(p)$\prod a_{i\,q-1(p(i))}$=sgn(q)$\sum$sgn($q^{-1}\circ p$)$\prod a_{i\,q-1(p(i))}$=sgn(q)det$A$

<u>Důsledek</u>: Platí i pro řádky (transpozice); prohození dvou řádku => změna znaménka; 2 řádky stejné => det=0

<u>Lemma o rozvoji</u>: Pro $\forall$ řádek i matice A platí $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ - A_{ij}=A bez i řádku, j sloupce

Dk: rozepsat příspěvky...

<u>Tvrzení</u>: Vynásobení řádku nenulovým skalárem t zvětší det t-krát, přičtení řádku ho nezmění Dk: ...

<u>Tvrzení</u>: Matice je regulární <=> det(A)≠0 Dk: Det(I)=Det(Ei)Det(A) …

<u>Tvrzení</u>: det(AB)=det(A)det(B) Dk: $A=\prod E_i$ … det(AB)=det(E_iB)=det(E_i)det(B)=det(A)det(B)

<u>Tvrzení</u>: det(A)=det(A^{T}); det(A^{-1})=1/det(A) Dk: sgn(p)=sgn(p^{-1}), rozpis...; det(AA^{-1})=det(A)det(A^{-1})=det(I)=1

<u>Věta o inverzní matici</u>: A je regulární nxn nad T potom $(A^{-1})_{ij}=\det^{-1}(A)\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det(A_{ji})$

Dk: Označme $B=(-1)^{i+j}\cdot\det(A_{ji})$; $(AB)_{ik}=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}B_{jk}=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(-1)^{k+j}\cdot\det(A_{kj})$ na diagon. det$A$, jinde 0

<u>Cramerovo pravidlo</u>: A regulární matice, pak soustava $Ax=b$ má !1 řešení s x_i=det($A_{i\to b}$)/det(A)

Dk: $x=A^{-1}b$=adjAb/det(A); x_j=[adj$A$]$_{j*}b$/det(A)=$\sum$[adj$A$]$_{jk}b_k$/det(A)=...

A regulární matice; A_i řádkové vektory - rovnoběžnostěn; objem$A$=|det(A)| Dk: Ortogonalizace neměni det...

VP V nad T, f:$V\to V$, pak λ ∈ je <u>vlastní číslo zobrazení f</u>, právě když existuje nenulový vektor $x\in V$ tž. $f(x)=\lambda x$,

<u>Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ</u> je každý $v\in V$, $v\neq0$, splňující $f(v)=\lambda v$

<u>Věta</u>: Nechť f je lin. zobr., λ_1, …, λ_k jsou navzájem různá vl. č. a x_1, …, x_k odpovídající vl. v., pak x_i jsou LN

Dk: indukcí k=1; k-1 => k sporem; $a_i\lambda_ku_i=a_iu_i=0=f(a_iu_i)=a_i\lambda_iu_i$ => $(\lambda_i-\lambda_k)a_iu_i$ – spor

Čtvercové matice A a A' se nazývají <u>podobné</u>, pokud $\exists$ regulární matice R tž. $A=R^{-1}A'R$

<u>Věta</u>: Jsou-li A a A' podobné, λ je vl. č. matice A a x příslušný vl. v., pak λ je vl. č. A' a $y=Rx$ je příslušný vl. v.

Dk: $A'y=A'Rx=(RAR^{-1})Rx=RAx=R\lambda x=\lambda Rx=\lambda y$

Matice je <u>diagonalizovatelná</u>, pokud je podobná nějaké diagonální matici

<u>Věta</u>: Matice $A\in T^{n\times n}$ má n různých vl. č. => matice je diagonalizovatelná

Dk: V R dáme za sloupce jednotlivé vl. v.; $AR=RD$

Věta: Matice je diagonalizovatelná <=> A má n LN vl. v. Dk: <= $Au=\lambda u$; $R=[u_i]$ => D= na diagonále λ_i
=> D na diagonále λ; $AR=RD$; $AR_{*k}=\lambda_k R_{*k}$ – R_{*k} vl. v., R regulární => sloupce LN

R není určena jednoznačně => A může být podobná více D; regulární nemusí být diagonalizovatelná a naopak

Pozorování: A matice lin. zobr. f vůči bázi B a A' matice f vůči bázi B', pak A a A' jsou podobné.

Pozorování: λ vl. č. matice A a u odpovídající vl. v., potom λ^k je vl. č. matice A^k a u odpovídající vl. v.; je-li navíc A diagonalizovatelná, je diagonalizovatelná i A^k a platí $A^k=R^{-1}D^kR$

Dk: $A^ku=A^{k-1}Au=A^{k-1}\lambda u=\lambda A^{k-1}u=\lambda^k u$; $A^k=(S^{-1}DS)(S^{-1}DS)...(S^{-1}DS)=S^{-1}D^kS$

Nechť A je čtvercová matice nad tělesem T, pak <u>charakteristický mnohočlen matice A</u> je $p_A(t)=\det(A-t\mathrm{I})$

Věta: λ je vl. č. matice A <=> λ je kořenem $p_A(t)$

Dk: λ je vl. č. <=> $\exists\, x\neq 0$: $Ax=\lambda x$ <=> $(A-\lambda\mathrm{I})x=0$ <=> $A-\lambda\mathrm{I}$ je singulární <=> $\det(A-\lambda\mathrm{I})=0$ <=> $p_A(\lambda)=0$

Tvrzení: Podobné matice mají stejné charakteristické mnohočleny

Dk: $p_A(t)=\det(A-t\mathrm{I})=\det(RA'R^{-1}-Rt\mathrm{I}R^{-1})=\det[R(A'-t\mathrm{I})R^{-1})=\det(R)\det(A'-t\mathrm{I})\det(R^{-1})=\det(A'-t\mathrm{I})=p_A(t)$

Tvrzení: Pro libovolné čtvercové matice A a B stejné velikosti n mají AB a BA stejná vlastní čísla

Dk: A nebo B regulární $AB=ABAA^{-1}$ => AB a BA si jsou podobné i AB =>...

$$\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{I} & A\\ 0 & \mathrm{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB & ABA\\ B & BA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & A\\ 0 & \mathrm{I}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & BA\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}AB-t\,\mathrm{I} & 0\\ B & -t\,\mathrm{I}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-t\,\mathrm{I} & 0\\ B & BA-t\,\mathrm{I}\end{vmatrix}=(-t)^n\cdot|BA-t\,\mathrm{I}|$$

Základní věta algebry: Každý mnohočlen stupně alespoň 1 nad $\mathbb{C}$ má alespoň 1 kořen

Důsledek: Každý mnhočlen stupně $n\geq 1$ nad $\mathbb{C}$ lze rozložit na součin n lineárních činitelů – <u>monomy</u>

<u>Zápis při eliminaci násobných činitelů</u> $p_A(t)=(-1)^n(t-\lambda_i)^{r_i}$, r_i je <u>algebraická násobnost kořene λ_i</u>

Pozorování: Lze-li matici A diagonalizovat, pak r_i značí # výzkytů λ_i na diagonále D Dk: $AR=RD$ …

Pozorování: $\det(A)=\prod\lambda_i^{r_i}$; $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i r_i$ Dk: $p_A(t)$ – položme $t=0$; koeficient při t^{n-1}

Tvrzení: Matice $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná <=> ke každému vl. č. λ $\exists$ r_i LN vl. v. (= $\dim(\ker(A-\lambda_i\mathrm{I}))=r_i$)

Dk: => $D-\lambda_i\mathrm{I}$ na diagonále r_i nul; <= R z vl. v. …

Věta: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ => $\exists$ matice J podobná matici A, kde J má tvar $\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \dots & \\ 0 & & J_n\end{pmatrix}$ kde $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0\\ & \dots & 1\\ 0 & & \lambda_i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$

<u>Jordanův normální tvar</u>; <u>Jordanovy buňky</u>; λ_i nemusí být různá – geometrická násobnost λ

Pro komplexní matici A je A^{H} <u>hermitovská transpozice matice A</u>, pokud $(A^{\mathrm{H}})_{ij}=(\bar{A})_{ji}$ $(AB)^{\mathrm{H}}=B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$

Komplexní matice se nazývá <u>hermitovská</u>, pokud $A=A^{\mathrm{H}}$.

Čtvercová matice se nazývá <u>unitární</u>, pokud $A^{\mathrm{H}}A=\mathrm{I}$

Pozorování: Pro hermitovskou matici A platí $\forall\, x\in\mathbb{C}^n: x^{\mathrm{H}}Ax\in\mathbb{R}$ Dk: $(x^{\mathrm{H}}Ax)^{\mathrm{H}}=x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}(x^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=x^{\mathrm{H}}Ax$ => …

Pozorování: Vl. v. příslučné různým vl. č. hermitovské matice jsou na sebe kolmé Dk: $\lambda_1x^{\mathrm{H}}y=(Ax)^{\mathrm{H}}y=\lambda_2x^{\mathrm{H}}y$

Věta: Každá hermitovská matice A má všechna vl. č. $\in\mathbb{R}$ a navíc $\exists$ unitární matice R tž. $R^{-1}AR$ je diagonální

Dk: $x^{\mathrm{H}}Ax=x^{\mathrm{H}}\lambda x=\lambda x^{\mathrm{H}}x$ … ; indukcí dle n, $n=1$ zřejmé, $\exists$ vl. č. a k němu vl. v., BÚNO ||vl. v.||=1, doplníme Steintzem+ Gram-Schmidtem na bázi a $P_n=(x_i)$ – unitární; $(P_n^{\mathrm{H}}A_nP_n)^{\mathrm{H}}=P_n^{\mathrm{H}}A_nP_n=P_n^{\mathrm{H}}(\lambda_ix_i)$
1. pole λ_1, zbytek prvního řádku a sloupce 0, zbytek A_{n-1} – indukcí existuje R_{n-1} a D_{n-1}; $R_{n-1}^{\mathrm{H}}A_{n-1}R_{n-1}=D_{n-1}$

$$R_n=P_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_{n-1}\end{pmatrix}\text{ unitární; } R_n^{\mathrm{H}}A_nR_n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_{n-1}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}P_n^{\mathrm{H}}A_nP_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & R_{n-1}^{H}A_{n-1}R_{n-1}\end{pmatrix}$$

Důsledek: $\forall$ symetrická matice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ má n reálných vl. č. a $\exists$ ortogonální matice R tž. $R^{-1}AR$ je diagonální

Buď V VP se skal. souč., pak lin. zobr. $f:V\to V$ se nazývá <u>ortogonální</u>, pokud $\forall\, u, v\in V$: $\langle u|v\rangle=\langle f(u)|f(v)\rangle$

Tvrzení: Pro lib. ortonormální bázi X a lib. dva vektory $u, v\in V$: $\langle u|v\rangle=[v]_X^{\mathrm{H}}[u]_X$

Dk: $\langle u|v\rangle=\langle\sum\alpha_ix_i|\sum\beta_jx_j\rangle=\sum\sum\alpha_i\bar{\beta}_j\langle x_i|x_j\rangle=\langle f(u)|f(v)\rangle=\sum\alpha_i\bar{\beta}_i$

Tvrzení: Jsou-li $A, B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ a platí $\forall\, x, y\in\mathbb{C}^n: x^{\mathrm{H}}Ay=x^{\mathrm{H}}By$, pak $A=B$ Dk: za x, y volme e_i, e_j

Věta: Lin. zobr. $f:V\to V$, kde V je konečně dimenzionální VP se skalárním součinem, je ortogonální <=> matice f vůči lib. ortonormální bázi $X=\{x_i\}$ je unitární

Dk: $\langle u|v\rangle=[v]_X^{\mathrm{H}}[u]_X=[v]_X^{\mathrm{H}}([f]_X^{\mathrm{H}}[f]_X)[u]_X=[f(v)]_X^{\mathrm{H}}[f(u)]_X$

$$[v]_X^{\mathrm{H}}\mathrm{I}[u]_X=[v]_X^{\mathrm{H}}[u]_X=\langle u|v\rangle=\langle f(u)|f(v)\rangle=[f(v)]_X^{\mathrm{H}}[f(u)]_X=([f]_X[v]_X)^{\mathrm{H}}[f]_X[u]_X=[v]_X^{\mathrm{H}}([f]_X^{\mathrm{H}}[f]_X)[u]_X$$

Lin. zobr. $f:V\to V$, kde V je VP se skalárním součinem,f se nazývá <u>izometrie</u>, pokud zachovává vzdálenosti

Pozorování: Každé ortogonální lin. zobr. je izometrie Dk: $||v||=\sqrt{\langle v|v\rangle}$ …

Lemma: Má-li matice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall$ vl. č. $\in\mathbb{R}$, pak $\exists$ ortogonální matice T tž. $T^{-1}AT$ je horní trojúhelníková

Dk: indukcí dle n; $\exists$ vl.v.,vl.č., $S=(v, w_i)$, $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix}$; $T=S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & T_{n-1}\end{pmatrix}$; …

Symetrická reálná matice se nazývá <u>pozitivně definitní</u>, pokud pro $\forall$ nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T Ax>0$
… <u>pozitivně semidefinitní</u>, … ≥ 0

<u>Věta</u>: Pro čtvercovou matici A jsou následující tvrzení ekvivalentní I. A je pozitivně definitní
II. Všechna vl. č. A jsou kladná Dk: I=>II vl. č. λ, vl. v. x: $0<x^T Ax=x^T\lambda x=\lambda x^T x$; $x^T x>0$ => $\lambda>0$
III. a) $\exists$ regulární matice U tž. $U^T U=A$ Dk: A symetrická => $\exists$ R,D: $A=R^{-1}DR$; $D=\sqrt{D}\sqrt{D}$; $U=\sqrt{D}\,R$
b) $\exists$ pozitvně definitní matice $U'^T U'=A$ Dk: $U'=R^T\sqrt{D}\,R$ – má všechna vl. č. kladná
Dk: III=>II Pro nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ $x^T Ax=(x^T U^T)Ux$ …

<u>Věta</u>: Symetrická matice A je pozitivně definitní, právě když $\det(A_k)>0$ pro $k=1,...n$; A_k – levá horní podmatice
Dk: $x=(x_k, 0, ..., 0)$; $x^T Ax$...

<u>Pozorování</u>: Pro pozitivně definitní matici A definuje $\langle x|y\rangle=x^T Ay$ skalární souč. na $\mathbb{R}^n$ Dk: ověřit axiomy

<u>Pozorování</u>: $\forall$ skalární souč. na $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako $\langle x|y\rangle=x^T Ay$, kde A je vhodná pozitivně definitní matice

<u>Věta</u>: Symetrická reálná matice $A=\begin{pmatrix}\alpha & a^T\\ a & \tilde{A}\end{pmatrix}$ je pozitivně definitní <=> $\alpha>0 \wedge \tilde{A}-\frac{a\cdot a^T}{\alpha}$ je pozitivně definitní
Dk: => vezmu vektor e_1; $x=(-\tilde{x}^T a/\alpha, \tilde{x})$; $0<x^T Ax=\tilde{x}^T(\tilde{A}-aa^T/\alpha)\tilde{x}+(\sqrt{\alpha}x_1+x^T a/\sqrt{\alpha})^2=$ větší $0+0^2$
<= $x_1=-\tilde{x}^T a/\alpha$ $x=(x_1, \tilde{x})$; $x^T Ax=\alpha x_1^2+x_1\tilde{x}^T a+x_1 a^T\tilde{x}+x^T\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{x}^T(\tilde{A}-aa^T/\alpha)\tilde{x}+(\sqrt{\alpha}x_1+x^T a/\sqrt{\alpha})^2>0$

<u>Pozorování</u>: Je-li A pozitivně definitní, potom $\forall$ $x_{ii}>0$ Dk: Přičítání násobku řádku nemění determinant...

<u>Choleského rozklad pro pozitivně definitní symetrické matice</u> $A=LDL^T$; L dolní Δ; A do odstupňovaného tvaru pouze odčítáním násobků předchozích řádků; i-tý řádek se vydělí příslušným prvkem z diagonály > LDH; že $H=L^T$: $a_{21}=(L_{21}, 1, 0, \dots, 0)D(1, 0, \dots, 0)=D_{11}L_{21}$, $a_{12}=(1, 0, \dots, 0)D(H_{12}, 1, 0, \dots, 0)=D_{11}H_{12}$

<u>Věta</u>: Matice je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ $\exists$ horní Δ matice U tž. $A=U^T U$ Dk: $\Rightarrow$ $U=L\sqrt{D}$; $\Leftarrow$ $x^T Ax=x^T U^T Ux>0$

$E=\{x \in \mathbb{R}^n \,|x^T Ax\leq 1\}$ je <u>elipsoid v</u> $\mathbb{R}^n$, A je pozitivně definitní; pro ortogonální R $=\{x \in \mathbb{R}^n \,|x^T R^T DRx\leq 1\}=$
$=\{R^{-1}y|y^T Dy\leq 1\}=\{R^{-1}\sqrt{D}^{-1}z|z^T z\leq 1\}$; osy elipsoidu E jsou obrazy původích os ($A=D$), tedy $R^T e_i$ – vl. v. A

<u>Kvadratická forma na</u> $\mathbb{R}^n$ je každá funkce tvaru g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tvaru $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_i x_j$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$

<u>Matice kvadratické formy</u> je matice B tž. $B_{ij}=a_{ij}$ když $i=j$, $a_{ij}/2$ když $i<j$, $a_{ji}/2$ když $i>j$ $g(x)=x^T Bx$; symetrická

<u>Bilineární forma na V</u> je f:$V\times V\to T$ tž. $f(\alpha u,v)=\alpha f(u,v)$; $f(u,\alpha v)=\alpha f(u,v)$; $f(u+v,w)=f(u,w)+f(v,w)$; $f(u,v+w)=f(u,v)+$...

Zobrazení g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá <u>kvadratická forma na V</u>, pokud $\exists$ bilineární forma f:$V\times V\to T$ tž. $g(u)=f(u,u)$

Nechť V je VP nad T a $X=v_i$ nějaká jeho báze, pak matice B_x kvadr. formy g:$V\to T$ pro bázi X je definována
$B_{ij}=[g(v_i+v_j)-g(v_i)-g(v_j)]/2=[f(v_i, v_j)+f(v_j, v_i)]/2$; značíme $[g]_X$

Kvadratická forma g je <u>pozitivně definitní</u>, pokud platí $g(x)>0$ $\forall$ $x \in V$, $x\neq 0$

<u>Pozorování</u>: Pro VP V s bází $X=v_i$ a vektor $u \in V$ a kvadratickou formu g platí $g(u)=[u]_X^T[g]_X[u]_X$
Dk: $g(u)=f(u,u)=f(\sum\alpha_i v_i,\sum\alpha_j v_j)=\sum\sum\alpha_i\alpha_j f(v_i,v_j)=\sum\sum\alpha_i\alpha_j f(v_i,v_j)=\sum\sum\alpha_i\alpha_j[f(v_i,v_j)+f(v_j,v_i)]/2=\sum\sum\alpha_i\alpha_j([g]_X)_{ij}=$...

<u>Lemma</u>: Nechť g:$V\to V$ je kv. f. a $[g]_X$ její matice vůči bázi X. Pak $[g]_Y=[\mathrm{id}]_{YX}^T[g]_X[\mathrm{id}]_{YX}$ je její matice vůči bází Y
Dk: Platí $[u]_X=[\mathrm{id}]_{YX}[u]_Y$; $g(u)=[u]_X^T[g]_X[u]_X=[u]_Y^T[\mathrm{id}]_{YX}^T[g]_X[\mathrm{id}]_{YX}[u]_Y=[u]_Y^T B[u]_Y$; diagonála $B=[g]_X$ ...

<u>Silvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem</u>: Pro každou kvadratickou formu $\exists$ báze X, vůči níž má g D a navíc jsou prvky na diagonále pouze 1,0,-1; počet jednotlivých prvků nezávisí na volbě X
Dk: 1) $\exists$ ortogonální matice T tž. $T[g]_X T^T=D=UD_0T^T$; $D_0=U^T T[g]_X T^T(U^T)^{-1}$
2) #0 zřejmé; sporem ?!?!?!

<u>Báze</u> je podmnožina $B\subseteq\{1, 2, \dots, n\}$ taková, že matice A_B je regulární

<u>Přípustná báze</u> je taková báze, že $A_b x_B=b$ má nezáporné řešení

<u>Bazické řešení</u> $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že x , pro který $\exists$ báze B taková, že $A_b x_B=b \wedge x_j=0$ $\forall j \in B$

<u>Bazické přípustné řešení</u> je bazické řešení, které je přípustné

<u>Lemma</u>: Přípustné řešení je bazické <=> sloupce A odpovídající kladným proměnným jsou LN
Dk: => z definice; <= $|k|=m$ – regulární, $|k|<m$ – doplníme na bázi ?!?!?!

<u>Lemma</u>: Pro každou m-prvkovou B, pro kterou je A_B regulární $\exists$ max. 1 přípustné bazické řešení
Dk: $Ax=b=A_B x_B+A_N x_N=A_B x_B$; $x_N=(0, \dots, 0)$; A_B regulární => x_B určeno jednoznačně/ něco možno záporné

<u>Pozorování</u>: Je-li účelová fce na množině přípustných řešení omezená, pak $\forall$ přípustná řešení x_0 $\exists$ bazické řešení x' tž. $c^T x'\geq c^T x_0$

<u>Dualita LP</u> – max $c^T x$, $Ax\leq b$, $x\geq 0$ <=> min $y^T b$, $y^T A\geq c^T$, $y\geq 0$

<u>Slabá věta o dualitě</u>: platí: $c^T x\leq y^T b$

<u>Silná věta o dualitě</u>: Mají-li (P) i (D) alespoň jedno řešení, mají i řešení optimální a platí $c^T x=y^T b$

<u>Simplexový algoritmus</u>: <u>Rovnicový tvar úlohy</u>: max $c^T x$: $Ax=b$, $x\geq 0$, A $m\times n$, $\mathrm{rank}(A)=m$