

Kardinální princip: neřekneme si, kolik tam toho je, ale řekneme, které množiny mají stejně členů

Cantor-Bernsteinova věta: Existuje-li zobrazení prosté v jednom i druhém směru, platí bijekce

Množina je spočetná, má-li stejnou mohutnost, jako množina přirozených čísel  $|X|=|\mathbb{N}|$  ( $|X|\leq|\mathbb{N}|\wedge|\mathbb{N}|\geq|X|$ )

Funkce: Definice:  $f \in X \times X \quad \forall x \in X \exists y \in Y : x f y$

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f: X \rightarrow Y, A \subseteq X \Rightarrow f[A] = \{x \in X \mid y = f(x) \text{ pro nějaká } x \in A\}$

obraz  $f \{f(x) \mid x \in A\}$  vzor  $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

je-li  $f$  prosté i na,  $\exists g$  takové, že  $f \circ g$  je identické a  $g \circ f$  také

Množina je spočetná, je-li možné ji seřadit do nekonečné posloupnosti

Dokažte, že spočetnost je nejmenší nekonečná mohutnost – Necht'  $X$  nekonečná a máme  $x_0 \dots x_n$ , mohu zvolit  $x_{n+1}$

$p(X)$  – množina všech podmnožin

Cantorova věta: Neexistuje zobrazení  $f: X \rightarrow p(X)$ , které by bylo na

Důkaz: Sporem – Necht'  $f$  je takové zobrazení. Definujme  $A$  jako množinu  $x$  z  $X$ , která nejsou v  $f(X)$

$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subseteq X \quad \exists a \in X$  tak, že  $f(a) = A$

Supremum:  $M \subseteq \mathbb{R}$   $\sup M$  je  $s \in \mathbb{R}$  takové, že (1)  $\forall m \in M \quad m \leq s$  (2)  $\forall m \in M \quad m \leq x$  pokud  $s \leq x$

pro lineární uspořádání: (1)  $\forall m \in M \quad m \leq s$  (2) Je-li  $x < s$ , pak  $\exists m \in M$ , že  $x < m$

Má-li každá neprázdná shora omezená množina  $\sup$ , má každá neprázdná zdola omezená množina infimum:

$M$  zdola omezená neprázdná  $N = \{x \mid x \text{ dolní mez } M\}$   $\sup N \notin N \rightarrow \exists m \in M \quad s > m \rightarrow \exists n \in N \quad m < n$ -spor

Limity:  $\lim a_n = L \quad \forall \epsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 \quad |a_n - L| < \epsilon \dots \lim a_n = x, \lim b_n = y$

$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n ; |(x+y) - (a_n + b_n)| \leq |x - a_n| + |y - b_n| < 2\epsilon$

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n ; |xy - a_n b_n| \leq b_n |x - a_n| + x |y - b_n|$

$\lim (1/a_n) = 1/\lim a_n ; |1/a_n - 1/x| = |1/x a_n| |a_n - x|$

Každá omezená posloupnost reálných čísel obsahuje konvergentní podposloupnost.

Definujme  $M = \{x \mid x < a_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$ . Pro libovolné  $\epsilon > 0$  platí  $s - \epsilon < a_n < s + \epsilon$  pro

nekonečně mnoho  $n$ . Volme  $k_n$  tak, aby  $s - 1/n < a_{k_n} < s + 1/n$

Posloupnost  $a_1, \dots, a_n$  je *cauchyovská*, jestliže  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0, \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \epsilon$

Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská. ( $-a_n < \epsilon, m > n \rightarrow a_m - a_n < 2\epsilon$ )

Má-li Cauchyova posloupnost konvergentní podposloupnost, je konvergentní ( $|a_m - a_n| < \epsilon, |a_{k_n} - x| < \epsilon \rightarrow |a_m - x| < 2\epsilon$ )

Věta Bolzano-Cauchova: Každá Cauchyova posloupnost konverguje  $|a_{n_0} - a_n| < \epsilon$ , ostatních jen konečně

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně, pokud konverguje  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně, právě když  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0$  tak, že pro  $n \geq n_0$  a libovolné  $k$  je  $\sum_{j=n}^{n+k} a_j < \epsilon$ . ( $a_n - a_{n+k}$ )

Absolutně konvergující řada konverguje.  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje a  $\forall n \quad |a_n| \leq b_n$  potom  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně

Součet absolutně konvergující řady nezávisí na přerovnání. Mějme  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ , vezměme  $f: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$  prosté a na

$n_1$  tak, aby  $\forall m, n > n_1 \quad \sum_{j=n+1}^m |a_j| < \epsilon$

$n_2$  tak, aby  $\forall n > n_2 \quad \left| \sum_{j=1}^n a_j - s \right| < \epsilon$

$n_3$  tak, aby  $\{1, 2, \dots, n_2\} \subseteq \{f(1), f(2), \dots, f(n_3)\}$

$n \geq \max(n_1, n_2, n_3)$ ,  $\left| \sum_{j=1}^n a_{f(j)} - s \right| = \left| \sum_{j=1}^{n_2} a_j + \sum_{\{f(1), f(2), \dots, f(n)\} \setminus \{1, 2, \dots, n_2\}} a_j - s \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n_2} a_j - s \right| + \sum_{\dots} |a_j| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

Interval: uzavřený, kompaktní  $\langle a, b \rangle$ ; otevřený  $(a, b)$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  je *spojitá*, jestliže  $\forall x \in D \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  takové, že  $\forall y \in D \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Necht'  $f, g$  spojité, potom i  $f+g; fg; 1/f (f \neq 0)$  spojité. Důkaz ekvivalentní jako u limit...

$f(x)=0$  má smysl jen pro spojité funkce, neumíme-li dát přímo hodnotu

Je-li funkce *nerostoucí*, nebo *neklesající*, pak je *monotónní*, je-li *rostoucí*, nebo *klesající*, pak je *ryze monotónní*

Necht' spojité fce je definována na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht'  $f(a)f(b) < 0$ , potom  $\exists c \in (a, b)$  tak, že  $f(c) = 0$

$M = \{x \in \langle a, b \rangle \mid f(x) \leq 0\}$ ,  $s = \sup M$  ( $M$  neprázdná, omezená),  $a \leq s \leq b$ ,  $\exists f(s)$

$f(s) < 0$ : pro  $0 < \varepsilon < -f(s)$  zvolme  $\delta > 0$  tak aby pro  $|x-s| < \delta$   $|f(x)-f(s)| < \varepsilon \rightarrow f(s)-\varepsilon < f(x) < f(s)+\varepsilon < 0$  ale  $f(x) > 0$  ( $x > s$ )

$f(s) > 0$ : pro  $0 < \varepsilon < f(s)$  zvolme  $\delta > 0$  tak aby pro  $|x-s| < \delta$   $|f(x)-f(s)| < \varepsilon \rightarrow f(s)-\varepsilon < f(x) < f(s)+\varepsilon > 0$  ale  $f(x) < 0 \gg f(s) = 0$

Darbouxova věta: Bud'  $f$  spojitá na intervalu  $J$ . Potom  $f[J]$  je také interval.

Bud'  $f(a), f(b) \in f[J]$ ;  $f(a) < d < f(b)$ .  $g(x) = f(x) - d >$  mezi  $a, b$  je  $c$  že  $g(c) = 0$ ;  $a, b \in J$  - interval  $\rightarrow c \in J$

Spojité funkce na intervalu, která je prostá, je ryze monotónní. Necht' ne, pak  $\exists x_1 < x_2 < x_3$   $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$

(nebo naopak)  $a \in (0, \min\{f(x_2)-f(x_1), f(x_2)-f(x_3)\})$  tedy  $f-a$  nabude na obou intervalech  $0$  – spor s prostá

Ryze monotónní funkce  $f$  na intervalu  $J$  je spojitá právě když  $f[J]$  je také interval.

$\varepsilon > 0$ . Zvolme  $x_1 < x_0 < x_2$  a  $f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) < f(x_2) < f(x_0) + \varepsilon$ . Položme  $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$   $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Je-li funkce na intervalu spojitá a prostá, je funkce k ní inverzní také spojitá.  $f$  spojitá prostá  $\gg$  ryze monotónní

a  $f[J]$ ;  $f$  ryze monotónní  $\gg f^{-1}$  též;  $f^{-1}$  ryze monotónní na intervalu  $f[J]$  a  $f^{-1}[f[J]]$  interval, je  $f^{-1}$  taky spojitá.

Funkce je spojitá, má-li v každém bodě za limitu svojí hodnotu. Skládání jako nahoře...

Funkce je spojitá právě když pro každou konvergentní posloupnost  $x_n$  konverguje i  $f(x_n)$  a platí  $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

Necht'  $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ , necht'  $\lim f_1(y)$  existují a jsou rovny  $b$ , potom i  $\lim g(y)$  je rovna  $b$ .  $|f_2(x) - g(x) + g(x) - f_1(x)|$

Necht'  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  a necht'  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  a necht' bud'  $\exists \delta$  tak, že pro  $0 < |x - x_0| < \delta$  je  $f(x) \neq b$  nebo je  $g(b)$

definována a  $g(b) = c$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$  existuje a je rovna  $c$ .

$\varepsilon > 0 \exists \alpha > 0$   $0 < |y - b| < \alpha \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon$   $\alpha > 0 \exists \delta > 0$   $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \alpha$ , pak varianty

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \text{ a protože } \cos x \text{ se blíží k } 1 \dots$$

Goniometrické funkce jsou na svých  $D_f$  spojitě

$$|\sin x - \sin x_0| = |\sin(x_0 + x - x_0) - \sin x_0| = |\sin(x - x_0) \cos x_0 + \sin x_0 [\cos(x - x_0) - 1]| \text{ substituce } y = x - x_0$$

Logaritmus: (1) definován a rostoucí na  $(0, \infty)$ ; (2)  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$   $\left( = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \right)$

Je spojitý  $|\ln x - \ln x_0| = |\ln(x/x_0)| = |\ln(x/x_0)/(x/x_0 - 1)| |x - x_0| |1/x_0|$

Exponenciála: inverze k logaritmu;  $\exp(1) = e$ ,  $\exp(0) = 1$ ;  $\exp(\ln \exp a + \ln \exp b) = \exp \ln(\exp a \cdot \exp b)$ ;  $\exp n = e^n$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \left( = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right)$$

Věta o diferenciálu: Funkce  $f$  má v okolí bodu derivaci  $A$  právě když existuje v okolí  $0$  funkce  $\mu(h)$  taková, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu(h) = 0 \text{ a taková, že } f(x+h) = f(x) + Ah + |h|\mu(h). \text{ oba směry z definice výše}$$

Existuje-li derivace funkcí  $f, g$  v bodě, existuje i derivace funkce  $f^*/g$  a platí... Limita součtu, součinu... je...

Necht'  $f$  má v bodě  $g(x)$  derivaci a necht'  $g$  má v bodě  $x$  derivaci. Potom  $f(g(x))$  má v bodě  $x$  derivaci  $f'(g(x))g'(x)$

$$f(g(x+h)) = \dots = f(g(x)) + ABh + h \{ Av(h) + [B + v(h)]\mu(Bh + hv(h)) \} \text{ (a pak i pro výsledný vztah)}$$

Má-li  $f$  v okolí bodu  $x_0$  inverzní funkci  $g$  a má-li  $g$  v  $f(x_0)$  derivaci  $\neq 0$ . Potom má  $f$  v  $x_0$  derivaci  $f'(x_0) = g^{-1}(f'(x_0))$

$$F(x) = (x - x_0)/(g(x) - g(x_0)) = 1/g'(x); \text{ spojitá, prostá } \rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} F(f(y)) = \frac{1}{g'(x)}, F(f(y)) = (f(y) - f(y_0))/(y - y_0) = f'(y)$$

Spojité funkce na kompaktním intervalu nabývá minima i maxima.

$s = \sup \{f(x) \mid x \in \langle a, b \rangle\}$  volme  $x_n, f(x_n) > s - 1/n$ , vybereme  $x_{k_n} = y_n$  - konverguje  $\rightarrow$  spojitá  $\rightarrow$  suprémum limitou

Věta Rollanova: Necht'  $f$  má derivaci na intervalu  $(a, b)$  a je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , necht'  $f(a) = f(b)$ , potom  $\exists c \in (a, b)$

tak, že  $f'(c) = 0$  Nabývá max. i min., jsou-li stejná, konstantní  $> 0$  všude, jinak alespoň v jednom...

Věta o střední hodnotě/ Lagrangeova/ o přírůstku funkce: Necht'  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a má derivaci na  $(a, b)$ ,

potom  $\exists c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ . Definujme  $F(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (f(x) - f(a))(b - a)$  - podle

Rollanovy věty existuje  $c$  že  $F'(c) = 0$ , tedy existuje  $\exists c \in (a, b)$  tak, že  $0 = f'(c)(b - a) - (f(b) - f(a))$

Necht'  $f$  má na intervalu  $(a, b)$  kladnou derivaci a je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , potom tam roste.  $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$

Necht'  $f$  má na  $J$  kladnou druhou derivaci, potom je tam ryze konkávní.  $\dots f'(y) - f'(x) = f''(z)(y - x)$

Je-li na intervalu  $f = 0$ , je  $f$  konstantní. Je-li na intervalu  $f = g'$ , liší se  $f$  a  $g$  pouze o konstantu.  $\dots$

Oskulační kružnice: Kružnice, která se křivce blíží, křivost je nepřímou úměrná poloměru kružnice.

$$(u(x) - b)^2 + (x - a)^2 = r^2 \quad (u(x) - b)u'(x) + (x - a) = 0 \quad u'^2(x) + (u(x) - b)u''(x) + 1 = 0 \quad r = |(1 + u'^2(x))^{3/2} / u''(x)|$$

Necht'  $f$  je definována a spojitá na  $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ , necht' má na  $(x_0, x_0 + \delta)$  derivaci a necht'  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$ , potom

$$\text{derivace funkce zprava existuje a je rovna } A. \quad (f(x+h) - f(x))/h = f'(y)$$

Newtonova metoda: Začnu v nějakém bodě, v něm udělám tečnu, v bodě, kde protne osu  $x$  znova...

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \quad \text{chyba: } |a - a_{n+1}| = \dots \leq |f''(c)/f'(a_n)| |a - a_n|, \text{ není-li " moc velké / ' moc malé } > \text{ kvadrát}$$

Zobecněná věta o stř. hodnotě: Necht'  $f, g$  jsou spojitě na  $\langle a, b \rangle$  s derivací na  $(a, b)$ ,  $g(a) \neq g(b)$  a necht' zde  $g \neq 0$ ,

$$\text{potom } \exists c \in (a, b) \text{ tak, že } f'(c)/g'(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)). \quad F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

L'Hospitalovo pravidlo: Necht'  $f, g$  mají derivace v  $x$  takových, že  $0 < |x-a| < \delta$ , necht'  $\lim_{x \rightarrow x_a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_a^+} g(x) = 0$ .

Existuje-li  $\lim_{x \rightarrow x_a^+} (f'(x)/g'(x))$ , má limitu i  $f(x)/g(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow x_a^+} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_a^+} (f'(x)/g'(x))$

Bud'  $L = \lim_{x \rightarrow x_a^+} f(x)/g'(x)$  pro  $\varepsilon |x-a| < \delta |f(x)/g(x) - L| = |[f(x)-f(a)]/[g(x)-g(a)] - L| = |f(\xi)/g'(\xi) - L| < \varepsilon$

L'Hospitalovo pravidlo II: Necht'  $f, g$  mají derivace v  $x$  takových, že  $0 < |x-a| < \delta$ , necht'  $\lim_{x \rightarrow x_a^+} g(x) = \infty$ . Existuje-li

$\lim_{x \rightarrow x_a^+} (f'(x)/g'(x))$ , má limitu i  $f(x)/g(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow x_a^+} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_a^+} (f'(x)/g'(x))$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left( \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} + \frac{f(y)}{g(x) - g(y)} \right) \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} = \left( \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(y)}{g(x) - g(y)} \right) \cdot \left( 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right)$$

I. Limita je 0:  $\delta_1 > |x-a| > 0$  aby  $|f(x)/g'(x)| < \varepsilon/4$ ,  $y$  aby  $\delta_1 > |y-a| > 0$ ,  $\delta_1 > \delta > 0$  aby  $g(y)/g(x) < 1 \wedge f(y)/\dots < \varepsilon/4 \dots$

II:  $L: h(x) = f(x) - Lg(x); h'(x)/g'(x) = f'(x)/g'(x) - L \rightarrow$  pravidlo I,  $f(x)/g(x) = h(x)/g(x) + L = L$

III:  $\infty: \delta_1 > |x-a| > 0$  aby  $|f'(x)/g'(x)| > 4K$ ,  $y$  aby  $\delta_1 > |y-a| > 0$ ,  $\delta_1 > \delta > 0$  aby  $g(y)/g(x) < 1/2 \wedge f(y)/\dots < 2K \dots$

L'Hospitalovo pravidlo III: Předchozí pro  $x$  blíží se  $k, a+, a-, \infty+$  nebo  $\infty-$ . Stačí dokázat nekonečna

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} H(1/x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm 0} [f'(x^{-1})/x^2]/[g'(x^{-1})/x^2] = \lim_{x \rightarrow \pm 0} f'(x^{-1})/g'(x^{-1}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/g(x) = L$$

Taylorův polynom stupně  $n$  příslušný k funkci  $f$ :  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

Věta o Taylorově zbytku: Necht' má funkce  $f$  v nějakém intervalu  $(a, b)$  derivace do řádu  $n+1$ , potom pro  $x$  platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad x \text{ konstantou } F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

$$\frac{F(a)}{g(a) - g(x)} = \frac{F(a) - F(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! g'(\xi)} (x-\xi)^n, F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! g'(\xi)} (x-\xi)^n (g(a) - g(x)); g(t) = (x-t)^{n+1} \dots$$

Necht'  $p(x)$  a  $p'(x)$  mají společný kořen, potom v  $p(x)$  je tento kořen alespoň dvojnásobný.

$$p(x) = (x-\alpha)p_1(x), p'(x) = (x-\alpha)q_1(x), p'(x) = p_1(x) + (x-\alpha)p_1'(x) \rightarrow p_1(x) = (x-\alpha)p_2(x) \rightarrow \text{dvojnásobný}$$

$\alpha$  je alespoň  $k$ -násobný kořen polynomu  $p$  právě když je kořenem všech  $p, p', p'', \dots, p^{(k-1)}$ .

Oba směry indukci jako předchozí...

Základní věta algebry: Každý polynom stupně alespoň 1 má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.

Necht'  $\alpha$  je kořenem polynomu  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^k$ , potom se  $p(x)$  dá napsat jako  $(x-\alpha)q(x)$

$$p(x) = p(x) - p(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_n x^k - \sum_{k=0}^n a_n \alpha^k = \sum_{k=0}^n a_n (x^k - \alpha^k) = \sum_{k=0}^n a_n (x-\alpha) (x^{k-1} \alpha^0 + x^{k-2} \alpha^1 + \dots + x^0 \alpha^{k-1})$$

Pro polynomy  $p(x), q(x)$  existují polynomy jednoznačně určené  $u(x), r(x)$  takové, že  $p(x) = u(x)q(x) + r(x)$  a  $\text{Str} < \text{Stq}$

Je-li  $\text{Stp} > \text{Stq}$ , existuje  $c$  že  $p(x) = c \text{Stp-Stq} q(x) + p_1(x)$  a  $\text{Stp} > \text{Stp}_1$  ( $c = a_{\text{Stp}}/b_{\text{Stq}}$ );  $r(x) = p_j(x)$

Pro spor nejednoznačné  $\rightarrow q(x)(u_1(x) - u_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$  - spor

Pro všechna  $a, b$  existují  $x, y$  taková, že  $xa + yb = d$  je největší společný dělitel. Zvolme  $x, y$  aby  $d$  mělo nejmenší možné ohodnocení  $a = c(xa + yb) + r \rightarrow a(1 - cx) - cyb = r$

Bud'  $\alpha, \beta$  dvě různá komplexní čísla,  $k \geq 1$ . Potom existují polynomy  $u(x), v(x)$  takové, že  $u(x)(x-\alpha) + v(x)(x-\beta)^k = 1 = p(z)$  - minimální ohodnocení ...  $(z-\alpha) = u_1(z)p(z) + r_1(z) \rightarrow r_1(z) = 0$  (kdyby  $\text{stp}(z) > 1$ , má kořen, který se rovná  $\alpha, \beta$  - spor) u  $\beta$  obdobně., Tedy  $p$  je nenulová konstanta.

Racionální lomená funkce  $p(x)/q(x)$  se dá zapsat ve tvaru  $P(x) + \sum_{j \in J} V_j(x)$  kde  $P$  je polynom a  $V_j$  jsou tvaru

$A/(z-\alpha)^k$  kde  $A$  je číslo a  $\alpha$  je kořen polynomu  $q(x)$  násobnosti nejméně  $k$ .

Indukce podle stupně polynomu  $q$ : Je-li 0, zřejmé; je-li 1, plyne z věty ob 2 výše; Necht' platí do stupně  $n$ .

$$q(x) = (x-\alpha)s(x), p(x)/(x-\alpha)s(x) = 1/(x-\alpha)(P(x) + \sum V_j) - \text{to první umíme, to druhé pokud } V_j = A/(z-\beta)^k$$

- podle předchozí věty  $A/[(x-\alpha)(z-\beta)^k] = Au(x)/(z-\beta)^k + Av(x)/(x-\alpha)$  - tyto členy už umíme.

Má-li polynom s reálnými koeficienty komplexní kořen  $\alpha$ , je jeho kořenem též  $\bar{\alpha}$ . Násobnosti jsou stejné.

$$\sum_{k=0}^n a_n x^k = 0 = \sum_{k=0}^n \bar{a}_n \bar{x}^k = \sum_{k=0}^n a_n \bar{x}^k$$

Hladké funkce  $F$  a  $G$  definované na intervalu jsou primitivní k téže funkci  $f$  právě když  $F-G$  je konstantní.

$$(F-c)' = F' - c' = F'; \text{ Je-li } F' = f = G', \text{ je } (F-G)' = 0. \text{ Označme } H = F-G, \text{ pak } H(x) - H(y) = H'(z)(x-y) = 0$$

Je-li  $\int f = F$  a je-li  $\varphi$  hladká funkce, je  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))$