Bodová konvergence: $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f, f_n, f{:}M\to\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{R}$; $\lim_{n\to\infty} f_n$, $f_n\to f$ znamená $\forall x\in M$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

Stejnoměrná konvergence: $f_n\rightrightarrows$ na M, když $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$: $\forall x\in M$, $\forall n>n_0$; $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Stejnoměrná BC podmínka: $M\subset\mathbb{R}$, $f_n{:}M\to\mathbb{R} \Rightarrow \exists f{:}M\to\mathbb{R}$, že $f_n\rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0$: $\forall m,n>n_0$, $\forall x\in M$: $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

Moore-Osgoodova věta: $f_n\rightrightarrows f$ a $\lim f_n(x)=a$, potom $\lim a_n$ a $\lim f(x)$ existují a rovnají se

Důsledek: f_n, f: $I\to\mathbb{R}$, f_n spojité a $f_n\rightrightarrows f$ na I, pak f je též spojitá Dk: $|f(x)-f(y)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(y)|$

Věta o záměně lim a d: f_n spojité, $f_n'\rightrightarrows g$; $\exists x_0$ t.ž. $(f_n(x_0))_n$ konverguje $\Rightarrow f_n\rightrightarrows f$ a $f'=g$

Dk: $|f_n(x)-f_m(x)|\le|b-a|\cdot|f_n'(\alpha)-f_m'(\alpha)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|$...

$|[f(x+h)-f(x)]-g(x)|=|f(x+h)-f_n(x+h)|/|h|+|f(x)-f_n(x)|/|h|+|f_n'(x+\theta)-g(x+\theta)|/|h|+|g(x+\theta)-g(x)|/|h|$

Limes inferior: a_n posloupnost reálných čísel, pak $\liminf_n a_n=\sup_n \inf_{k\ge n} a_n$

Pozorování: Nechť $\lim a_n=L$. Potom $L=\limsup a_n$

Věta: a_n, b_n nezáporné posloupnosti, $\lim b_n=B>0$, potom $\liminf(a_nb_n)=B\cdot\liminf a_n$

Dk: n_0 aby $B-\varepsilon<b_n<B+\varepsilon$; $\liminf a_nb_n$, b_n zasubstitujeme $\Rightarrow$ omezení, limití k BA...

Mějme mocninou řadu $\sum a_n(x-c)^n$. Potom poloměr konvergence této řady je $r=\liminf(1/\sqrt[n]{|a_n|})$

Věta: r pol. k. řady $\sum a_n(x-c)^n$, potom na intervalu $(c-r, c+r)$ konverguje lokálně stejnoměrně a $|x-c|>r$ vůbec

Dk: existuje n, že je to větší pak furt větší než 1... existuje n, že je to pak menší 1, zvojmo dost velké C...

Rozdělení $<a,b>$ konečná posloupnost $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$; D' jemnější D – $D'\prec D$ – $\{t_i\}\subseteq\{t_j'\}$

f reálná fce na $<a,b>$, $s(f,D)=\sum\inf f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})$ (dolní odhad); $S(f,D)=\sum\sup f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})$ (horní odhad)

Důsledek:existuje konečné sup $s(f,D)=\underline{\int} f(x)dx$ dolní Riemannův integrál a inf $S(f,D)=\overline{\int} f(x)dx$ horní Riem. i.

Jestliže $\underline{\int} f(x)dx=\overline{\int} f(x)dx$, pak Riemannův integrál z funkce f přes $<a,b>$ a značíme $\int f(x)dx$

Věta Fce je Riemannovsky integrovatelná $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists$ rozdělení D: $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$

Fce je stejnoměrně spojitá, jestliže $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x,y$, $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Věta: Spojitá fce na kompaktním intervalu je stejnoměrně spojitá

Dk: Sporem, vyberu konvergentní $x_n=y_n$, ale $f(x)\neq f(y)$

Věta: Spojitá fce na $<a,b>$ má vždy Riemannův integrál

Věta: Nechť $a<b<c$. Nechť f je spojitá na $<a,c>$. Potom $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$. Dk: odlišnost o $\varepsilon/2$; součet...

Konvence: Je-li $a>b$, pak $\int_a^b f=-\int_b^a f$

Základní věta analýzy: f spojitá na $<a,b>$; definuje $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Potom $F'\ \exists$ a je rovna f Dk: $\Delta F(x)/h$

Věta o střední hodnotě pro integrál: f spojitá na $<a,b>\Rightarrow\exists c\in<a,b>$ tak, že $\int f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$

Věta: Buď $G'=f$ na $<a,b>$, potom $\int f(x)dx=G(b)-G(a)=[G(x)]$ – Newtonův integrál – i pro nespojité fce

Věta: Riemannův integrál se nezmění, pokud fci změníme v konečně mnoha bodech

Věta: f,g na $<u,v>$: $\inf f+\inf g\le\inf(f+g)$

Věta: Nechť α, β jsou konstanty a $\int f$, $\int g$ existuje. Potom $\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g$

Věta: Nechť u,v mají derivace na $<a,b>$. Potom $\int u(x)v'(x)dx=[uv]-\int u'(x)v(x)dx$. $\int_a^b u(v(x))v'(x)dx=\int_{v(a)}^{v(b)} u(y)dy$

Existence logaritmu: $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$; ověřit axiomy – def. a rostoucí na $(0,\infty)$; $\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

Délka křivky: $\sum\sqrt{\{(t_i-t_{i-1})^2+[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2\}}=\sum\sqrt{\{(t_i-t_{i-1})^2+[f'(\xi_i)(t_i-t_{i-1})]^2\}}=\sum(t_i-t_{i-1})\sqrt{[1+f'^2(\xi_i)]}=\int\sqrt{[1+f'^2(x)]}dx$

Kritérium konvergence řad: $a_n\ge 0$; $\sum_{k=2}^n a_k\le\int_0^n f(x)dx\le\sum_{k=1}^n a_k$

Věta: f nezáporná nerostoucí spojitá na $<1,\infty)$. Potom řada $\sum a_n=f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int f(x)dx\le k$ pro nějaké pevné k

Věta: f je fce s periodou p. Potom $\int_0^p f(x)dx=\int_a^{p+a} f(x)dx=\int_0^p f(x+c)dx$

Funkce po částech spojitá – nespojitá v konečně mnoha bodech

Funkce po částech hladká – navíc má po částech derivaci a v místech limitu z obou stran

Existuje dělení, že na každém (t_i, t_{i+1}) existuje spojitá f' a v každém t_i existují vlastní jednostranné limity

Lemma o rychlých kmitech: Nechť g je po částech spojitá na $<a,b>$. Potom $\lim_{y\to\infty}\int_a^b g(x)\cdot\sin(yx)\,dx=0$

Dk: $\int\sin(yx)dx\leq 2/y$; dělení, že $f(x)-f(t_i)<\varepsilon/2(b-a)$; $y>\sum f(t_i)/4\varepsilon$; $\int g(x)\cdot\sin(yx)dx=\int[g(x)-g(t_i)]\cdot\sin(yx)dx+\dots$

f na $<a,b>$, $<f,g>=\int f(x)g(x)dx$ ~ skalární součin; $<-\pi, \pi>$ $\int\sin(nx)\cos(mx)dx=0$; $\int\sin(nx)\sin(mx)dx=0$ $n\neq m$ ⇨ orton.

<u>**Věta**</u>: $½+\sum^n\cos(k\alpha)=\sin[(2n+1)\cdot\alpha/2]/[2\cdot\sin(\alpha/2)]$

$<-\pi,\pi>$, $n\geq 0$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int f(t)\cos(nt)dt$, $n\geq 1$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int f(t)\sin(nt)dt$; <u>Fourierova řada -</u> $s_n(x)=a_0/2+\sum^n[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)]$

<u>**Dirichletova věta**</u>: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je 2π-period., $f|[-\pi,\pi]$ po částech hladká ⇒ F. řada fce f bodově konv. k $[f(x_+)+f(x_-)]/2$

Dk: $s_n(x)=1/\pi\int[f(x+t)-f(x_+)+f(x-t)-f(x_-)+f(x_+)+f(x_-)]\cdot\ldots=[f(x_+)+f(x_-)]/2\cdot 1$(další)+0(lema o rychlých kmitech)

<u>**Věta BD???**</u>: navíc ještě f spojitá ⇒ $f(x)=a_0/2+\sum^\infty[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)]$; konvergence stejnoměrná

<u>**Lemma**</u>: $s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin[(n+1/2)t]}{2\cdot\sin(t/2)}dt$ Dk: Dosadíme, $\cos(a+b)=\ldots$; rozložit; substituce

<u>Metrické a topologické prostory</u> (M,d); <u>metrika</u> $d:M\times M\to\mathbb{R}_0^+$; $d(x,y)=d(y,x)$; $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$; $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$M=\mathbb{R}^n$; $X\subset M$ je <u>otevřená</u>: $\forall a\in X\ \exists v>0$: $d(a,v)\subset X$; $X\subset M$ je <u>uzavřená</u>: $M\setminus X$ je otevřená ≈ $((a_n)\in X, a_n\to a\Rightarrow a\in X)$

<u>**Tvrzení**</u>: X_i, $i\in I$ otevřené množiny, pak $\cup X_i$ otevřená a pro konečná I je i $\cap X_i$ otevřená

<u>**De Morganovy identity**</u>: $M\setminus\cup X_i=\cap(M\setminus X_i)$; $M\setminus\cap X_i=\cup(M\setminus X_i)$

<u>**Věta**</u>: $f:(X,d)\to(Y,d')$ je spojité zobrazení ⇔ $\forall(x_n)_n$ konvergentní v X je $(f(x_n))_n$ konverg. a platí $f(\lim x_n)=\lim f(x_n)$

(X, d)je <u>kompaktní</u>, jestliže z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost

<u>**Věta**</u>: Spojitý obraz kompaktního intervalu je kompaktní

<u>**Důsledek**</u> Spojitá reálná fce na kompaktním prostoru nabývá minima i maxima

<u>**Věta**</u>: spojité zobrazení na kompaktním intervalu je stejnoměrně spojité)

<u>**Věta**</u>: Posloupnost (x_i^1, x_i^2) konverguje v $X_1\times X_2$ ⇔ x_i^1 i x_i^2 konvergují

<u>**Věta**</u>: Součin konečně mnoha kompaktních intervalů je kompaktní

<u>**Věta**</u>: Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní

Metrický prostor je <u>omezený</u>, existuje-li číslo, že žádné dva prvky nejsou vzdálenější

<u>**Věta**</u>: Podprostour Euklidovského prostoru E_n je kompaktní ⇔ je v E_n uzavřený & omezený

<u>Vzdálenost bodu od množiny</u> $d(x,M)=\inf\{d(x,y)|y\in M\}$

<u>Uzávěr X</u> je nejmenší uzavřená množina obsahující X; $\cup\ \overline{M}=\overline{\cup M}$

U je <u>okolí bodu x</u>: $\exists\varepsilon>0$ takové, že $\Omega(x,\varepsilon)\subseteq U$; $\Omega(x,\varepsilon)=\{y|d(x,y)<\varepsilon\}$

$U\subseteq X$ je <u>otevřená</u>, jestliže $\forall x\in U$ je U okolí x

<u>**Věta**</u>: A je <u>uzavřená v X</u> ⇔ $X\setminus A$ je otevřená

<u>**Věta**</u>: Sjednocení (průnik) libovolného (konečného) počtu otevřených množin je otevřená množina...

<u>Uzávěr množiny A</u> je $\overline{A}=\{x|\ d(x,A)=0\}$

<u>**Definice spojitosti**</u>: $\forall x\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.ž. $f[\Omega(x,\delta)]\subseteq\Omega(f(x),\varepsilon)$

<u>**Věta**</u>: Pro $f:(X,d)\to(Y,d')$ je ekvivalentní: 1) f je spojité

2) $\forall U$ otevřenou v Y je $f^{-1}[U]$ otevřená v X

3) $\forall A$ uzavřenou v Y je $f^{-1}[A]$ uzavřená v X

4) $\forall M\subseteq X$ je $f[\overline{M}]\subseteq\overline{f[M]}$

(X,d) se nazývá <u>separabilní</u>, má-li spočetnou hustou podmnožinu; M je <u>hustá</u>, jestliže $\overline{M}=X$

M je hustá v X ⇔ pro ∀ neprázdné otevřené podmnožiny U platí $U\cap M\neq\emptyset$

$\mathscr{B}$ je <u>base MP</u>, je-li to soustava otevřených množin taková, že ∀ otevřená množina je sjednocením prvků z $\mathscr{B}$

<u>**Věta**</u>: MP je separabilní ⇔ Má spočetnou basi

∀ ∃ ∈ ∉ ∋ ∌ ∏ ∑ ∓ ∘ ∙ √ ∛ ∜ ∞ ∧ ∨ ∩ ∪ ∫ ∼ ≃ ≄ ≅ ≆ ≇ ≈ ≉ ≐ ≔ ≕ ≝ ≠ ≡ ≤ ≥ ≪ ≫ ≺ ≻ ≼ ≽ ⊂ ⊃ ⊄ ⊅ ⊆ ⊇ ⊈ ⊉ →
↔ ⇉ ⇐ ⇒ ⇔ ⇦ ⇨ ℂ δ ε ℋ ℌ ℍ 𝒥 ℑ ℒ ℓ ℕ ℘ ℙ ℚ ℛ ℜ ℝ ℤ ℬ ℭ ℱ ℳ ½ ⅓ ⅔ ¼ ¾ ⅕ ⅖ ⅗ ⅘ ⅙ ⅚ ⅛ ⅜ ⅝ ⅞ ⅟