Metrické a topologické prostory (M,d); metrika $d:M\times M\to\mathbb{R}_0^+$; $d(x,y)=d(y,x)$; $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$; $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$
$M=\mathbb{R}^n$; $X\subset M$ je otevřená: $\forall a\in X\ \exists v>0$: $d(a,v)\subset X$; $X\subset M$ je uzavřená: $M\setminus X$ je otevřená $\approx$ $((a_n)\in X,\ a_n\to a \Rightarrow a\in X)$
$x_n\to x$; $\lim x_n=x$: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$: $\forall n>n_0$: $d(x, x_n)<\varepsilon$
Tvrzení: X_i, $i\in I$ otevřené množiny, pak $\cup X_i$ otevřená a pro konečná I je i $\cap X_i$ otevřená; otevřené: $\emptyset$; X
De Morganovy identity: $M\setminus\cup X_i=\cap(M\setminus X_i)$; $M\setminus\cap X_i=\cup(M\setminus X_i)$
$A\subseteq X$: $d(x, A)=\inf\{d(x, a)|\ a\in A\}$
Věta: $f:(X, d)\to f'(X', d')$ spojité: $\forall x\in X$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $d(x, y)<\delta \Rightarrow d'(f(x), f(y))<\varepsilon$
Věta: $f:(X,d)\to(Y,d')$ je spojité zobrazení $\Leftrightarrow$ $\forall(x_n)_n$ konvergentní v X je $(f(x_n))_n$ konverg. a platí $f(\lim x_n)=\lim f(x_n)$
=> f spojitá, x_n konverguje; k ε volme δ, že $d_1(x, y)<\delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y))<\varepsilon$; k δ volme n_0... <= sporem
(X, d) je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost
Věta: Spojitý obraz kompaktního intervalu je kompaktní
Důsledek: Spojitá reálná fce na kompaktním prostoru nabývá minima i maxima
Věta: spojité zobrazení na kompaktním intervalu je stejnoměrně spojité)
Věta: Posloupnost (x_i, y_i) konverguje v $X\times Y \Leftrightarrow x_i$ i y_i konvergují
=> $\forall\varepsilon\ \exists n_0$: $\max\{d_1(x_n, x), d_2(y_n, y)\}<\varepsilon$ $(n_0<n)$ … <= konvergují složky, metrika součtu převoditelná...
Věta: Součin konečně mnoha kompaktních intervalů je kompaktní
Věta: Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní
Věta: Metrický prostor je kompaktní $\Leftrightarrow$ každá nekonečná množina v něm má hromadný bod
=> vyberu konvergentní podposloupnost; <= ??? vezmu posloupnost, hromadný bod $\Omega(x, 1/k)$...
Metrický prostor je omezený, existuje-li číslo, že žádné dva prvky nejsou vzdálenější
Věta: Podprostour Euklidovského prostoru E_n je kompaktní $\Leftrightarrow$ je v E_n uzavřený & omezený
Vzdálenost bodu od množiny $d(x,M)=\inf\{d(x,y)|y\in M\}$
Uzávěr X je nejmenší uzavřená množina obsahující X; $\cup\overline{M}=\overline{\cup M}$
U je okolí bodu x: $\exists\varepsilon>0$ takové, že $\Omega(x,\varepsilon)\subseteq U$; $\Omega(x,\varepsilon)=\{y|d(x,y)<\varepsilon\}$
Kulové okolí $\Omega(x, \varepsilon)=\{y|\ d(x, y)<\varepsilon\}$; U je okolí bodu x, pokud $\exists\varepsilon$: $\Omega(x, \varepsilon)\subseteq U$
Uzávěr množiny A je $\overline{A}=\{x|\ d(x,A)=0\}$; $A\subseteq\overline{A}$; $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$; $\overline{\emptyset}=\emptyset$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; A uzavřená $\Leftrightarrow \overline{A}=A$
Definice spojitosti: $\forall x\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.ž. $f[\Omega(x,\delta)]\subseteq\Omega(f(x),\varepsilon)$
Věta: Pro $f:(X,d)\to(Y,d')$ je ekvivalentní: 1) f je spojité
2) $\forall U$ otevřenou v Y je $f^{-1}[U]$ otevřená v X
3) $\forall A$ uzavřenou v Y je $f^{-1}[A]$ uzavřená v X
4) $\forall M\subseteq X$ je $f[\overline{M}]\subseteq\overline{f[M]}$
$M\subseteq X$ je hustá, jestliže $\overline{M}=X$; (X,d) se nazývá separabilní, má-li spočetnou hustou podmnožinu
M je hustá v $X \Leftrightarrow$ pro $\forall$ neprázdné otevřené podmnožiny U platí $U\cap M\neq\emptyset$
$\mathcal{B}$ je base MP, je-li to soustava otevřených množin taková, že $\forall$ otevřená množina je sjednocením prvků z $\mathcal{B}$
Věta: MP je separabilní $\Leftrightarrow$ Má spočetnou basi
(x_n) v (X, d) je cauchyovská, jestliže $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$ tak, že $m, n\ge n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m)<\varepsilon$
(X, d) je úplný prostor, jestliže každá cauchovská posloupnost konverguje
Věta: Součin úplných prostorů je úplný. (x_i, y_i) cauchovská $\Leftrightarrow (x_i)$ i (y_i) cauchovská – převoditelnost metrik
Věta: Podprostoru úplného prostoru je úplný $\Leftrightarrow$ je uzavřený (uzavřený $\Rightarrow$ úplný) $\wedge$ (~uzavřený $\Rightarrow$ ~úplný)
Pozn: Má-li cauchyovská posl. konvergentní podposloupnost, konverguje celá; kompaktní prostor je vždy úplný
x je hromadný bod množiny A v metrickém prostoru X, jestliže $\forall$ okolí U bodu x je množina $A\cap U$ nekonečná
pokrytí – sjednocení dává celý prostor; Lindelöfův prostor – z každého pokrytí lze vybrat spočetné
Věta: Ekvivalentní: (1) X je separabilní; (2) X má spočetnou bázi; (3) X je Lindelöfův
!!!!!!!!!!!!!!!!!!
X je totálně omezené, jestliže $\forall\varepsilon>0$ existuje konečná M taková, že $d(x, M)<\varepsilon$ pro $\forall x\in X$
Věta: Každý kompaktní metrický prostor je totálně omezený ?!?!?! Sporem => není konvergentní x_i …
Věta Heine-Borelova: Metrický prostor je kompaktní $\Leftrightarrow$ z $\forall$ otevřeného pokrytí otev. mn. lze vybrat konečné
?!?!?!

Řekneme, že $f(x_1, \dots, x_n)$ má v bodě $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ totální diferenciál, $\exists$-li A_i a funkce μ definovaná v okolí $(0, ..., 0)$, $\mu(0, ..., 0)=0$ spojitá. Že platí $f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)-f(x_1, \dots, x_n)=\sum A_j h_j+\|\vec{h}\|\mu(\vec{h})$; f má TD $\Rightarrow$ je spojitá

Parciální derivace $\partial f/\partial x_i$ - jedna proměnná, zbytek fixuji; má-li f totální diferenciál, má parciální derivace

Věta: Nechť má funkce f v bodě $\mathbf{x}$ spojité parciální derivace, má tam totální diferenciál $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=h_1\,\partial f(x_1+\theta h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)/\partial x_1+...+h_n\,\partial f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+\theta h_n)/\partial x_n=\sum+$ něco malého (f' spojité)

Věta: Nechť f má v $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ totální diferenciál a nechť φ_i mají v t derivace, $\varphi_i(t)=x_i$. Potom derivace $F(t)=f(\varphi_i(t))$ existuje a je rovna $\sum \partial f/\partial x_i \cdot \varphi'_i(t)$. Rozepsat derivaci, střední hodnota...

Základní věta o derivacích složené funkce: Nechť f má v $\varphi_1(\boldsymbol{t}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{t})$ totální diferenciál a nechť φ_i mají v $\boldsymbol{t}$ parciální derivace. Potom $\partial(f\circ\boldsymbol{\varphi})/\partial t_j=\sum \partial f/\partial x_i \cdot \partial\varphi_i/\partial t_j$

Věta: Nechť $f(x, y)$ má v okolí bodu (x, y) spojité parciální derivace do 2. řádu, pak $\partial^2 f/\partial x\partial y=\partial^2 f/\partial y\partial x$ …

Věta o implicitní fci: Nechť F je definov. na okolí (x_0, y_0) s p.d. do řádu n, nechť $F(x_0, y_0)=0$ a $\partial F(x_0, y_0)/\partial y\neq 0$. Potom pro malá δ, Δ platí $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ existuje v intervalu $(y_0-\Delta, y_0+\Delta)$ právě jedno y takové, že $F(x, y)=0$, označme $y=f(x)$, má $f(x)$ derivace až do řádu n; existence – např. rostoucí spojitost, totální diferenciál, … derivace – $F(x+h, f(x+h))-F(x, f(x))=... \Rightarrow f(x+h)-f(x)=-h(\partial F(...)/\partial x)/(\partial F(...)/\partial y) \Rightarrow f$ spojitá => … další d....

Věta: Nechť $F(\boldsymbol{x}, y)$ má spojité parciální derivace až o řádu n, $F(\boldsymbol{x_0}, y_0)=0$ a $\partial F(\boldsymbol{x_0}, y_0)/\partial y\neq 0$. Potom pro malá δ, Δ platí $\forall \boldsymbol{x}$, $|x_i-x_i|<\delta$ existuje v intervalu $(y_0-\Delta, y_0+\Delta)$ právě jedno y takové, že $F(x, y)=0$, označme $y=f(\boldsymbol{x})$, má $f(\boldsymbol{x})$ derivace až do řádu n; existence – okolí že roste, spojitost, totální diferenciál,...; derivování taky obdobné

Věta: Nechť $F_i(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)^{i=1, \dots, m}$ mají spojité derivace až do řádu n. Nechť $F(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})=0$, $\det(\partial F_i/\partial y_j)\neq 0$. Potom pro malá δ, Δ platí $\forall \boldsymbol{x}$, $|x_i-x_i|<\delta$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y}$ $|y_i-y_i|<\Delta$ takové, že $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ a vzniklé $y_i=f_i$ mají spojitou derivaci do řádu n. ?!?!?! Indukcí dle m.

$f{:}U\to E_n$, U otevřená, $\subseteq E_n$ regulární, pokud má spojité derivace 1. řádu a $\det(\partial F_i/\partial y_j)=D(f_1, ..., f_n)/D(x_1, ..., x_n)\neq 0$

Pozorování: Má-li f lokální extrém v $\boldsymbol{a}$, je tam $\forall i\ \partial F(\boldsymbol{a})/\partial x_i=0$.

Věta o vázaných extrémech: Nechť f, g_1, …, g_k jsou funkce n proměnných, $n>k$ se spojitými derivacemi prvního řádu. Nechť v bodě $\boldsymbol{a}$ nabývá f lokálního extrému za podmínek $g_i(\mathbf{x})=0$; $(\partial g_i/\partial x_j)$ má vždy maximální stupeň k. Potom existují λ_i, že $\forall i$: $\partial f(\boldsymbol{a})/\partial x_i+\sum\lambda_j\,\partial g_j(\boldsymbol{a})/\partial x_i=0$.

$f{:}(X, d)\to(Y, d')$ mezi metr. prostory je stejnoměrně spojité, pokud $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x, y$: $d(x, y)<\delta \Rightarrow d_1(f(x), f(y))<\varepsilon$

Věta: Buď (X, d) kompaktní, potom každé zobrazení $f(X, d)\to(Y, d')$ je stejnoměrně spojité. Sporem

Podrozdělení = podrozdělení každé složky; zjemnění = zjemnění každé složky $s(f, D)=\sum\inf\{f(x)|x\in X\}\cdot\mu(x)$...

Dolní, horní Riemanův integrál... RI existuje, když $\forall\varepsilon>0\ \exists D$ takové, že $S(f, D)-s(f, D)<\varepsilon$ spojitá fce na takovéto množině J je vždy stejnoměrně spojitá

Věta: Je-li f: $J\to\mathbb{R}$ spojitá, potom $\int f$ existuje. $\varepsilon>0$, k němu $\delta>0$ t.ž. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})<\delta\Rightarrow|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|<\varepsilon$, D, že $K\in D$, $\varnothing K<\delta$...

Věta o střední hodnotě: Nechť na J je $a<f(x)<b$. Potom a vol$J<\int f<b$ vol$J$

Fubiniova věta: Buď J' n-rozměrný a J'' m-rozměrný interval, $J=J'\times J''$. Potom pro f spojité na J platí $\int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{xy}=\int(\int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int(\int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ Oboje stejně... rozepsání rozdělení...

Leviho věta: Nechť f_n konvergují k f monotónně. Potom $\int f=\lim\int f_n$.

Lebesgueova věta: Nechť f_n konvergují k f a $|f_n(x)|<g(x)$. Potom $\int f=\lim\int f_n$.

Věta o substituci: $g{:}U\to E_n$ regulární zobrazení $U\subset E_n$, $J\subset U$, f spojitá. Potom $\int_{g[J]}f(x)\mathrm{d}x=\int_J f(g(y))\cdot|D_g(y)|\mathrm{d}y$.

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$ je obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu

ODR n-tého řádu vzřešená vyhledem k n-té derivaci je $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení ODR 1. řádu: Pokud $f(x, y)$ spojité v okolí (x_0, y_0), pak v okolí x_0 existuje řešení $y'=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$. Pokud navíc $\partial f/\partial y$ spojitá na okolí (x_0, y_0), pak je řešení právě jedno.

Věta o pevném bodě: Nechť pro $\alpha(X, d)\to(X, d)$ platí $\forall x, y$: $d(\alpha(x), \alpha(y))<Ad(x, y)$, $0<A<1$ pevné, pak existuje právě jedno řešení rovnice $\alpha(x)=x$. Cauchyova nerovnost, že to konverguje s A^k

Zobrazení $f{:}(X, d)\to(Y, d')$ je Lipschitzovské, pokud $\exists K$, že $d'(f(x), f(y)\leq Kd(x, y)$; Omezená derivace => Lip.

Funkce je Lipschitzovská v proměnné y, pokud $\forall x\ \exists K\ |f(x, y)-f(x, z)|\leq K|y-z|$

Věta o existenci a jednoznačnosti: Nechť $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ jsou lokálně Lipschitzovské v y_i. Potom $\forall(x^0, \boldsymbol{y^0})$ existuje právě jedno řešení soustavy rovnic $y_i'(x)=f_i(x, \mathbf{y(x)})$ takové, že $y_i(x_0)=y_i^0$

Soustava lineárních diferenciálních rovnice: $y_i'(x)=\sum a_{ij}(x)y_j(x)+b_i(x)$; n-tého řádu: $y^{(n)}+\sum a_j(x)y^{(j)}(x)=b(x)$