*Množina*: axiom, nedefinuje se; *x*∈*X* – prvek náleží do množiny *X*; zápis výčtem prvků nebo vlastností

*X*=*Y* - ∀*x*:x∈*X*⇔*x*∈*Y*; *X*⊆*Y* – ∀*x*:x∈*X*⇒*x*∈*Y*; *X*⋂*Y*={*x*:*x*∈*X*∧*x*∈*Y*}, *X*⋃*Y*={*x*:*x*∈*X*∨*x*∈*Y*}, *X*\*Y*={*x*∈*X*:*x*∉*Y*}

|*X*| - *mohutnost/ velikost X*: počet prvků v množině; Ø – prázdná množina

2*X*=𝒫(*X*) – *Potenční množina množiny X* – množina všech podmnožin; |𝒫(*X*)|=2|*X*|

*Uspořádaná dvojice prvků x, y*: (*x*,*y*); (*x*,*y*)=(*x*‘,*y*‘) – *x*=*x*‘∧*y*=*y*‘; {{*x*},{*x*,*y*}}

*Kartézský součin množin X, Y*: *X*×*Y*={(*X*,*Y*):*x*∈*X*,*y*∈*Y*}

*Binární relace mezi množinami X a Y*: libovolná podmnožina kartézského součinu; (*x*,*y*)∈*R* značíme *xRy*

*Reflexivní*: ∀*x*∈*X*: *xRx*; *Symetrická*: ∀*x*,*y*∈*X*: *xRy*⇔*yRx*; *Tranzitivní*: ∀*x*,*y*,*z*∈*X*: (*xRy*&*yRz*)⇒*xRz*

*Ekvivalence*: Všechny předchozí; *Třída ekvivalence určená prvkem x*: *R*[*x*]={*y*∈*X*:*xRy*}

*R* ekvivalence na *X* potom ∀*x*∈*X*: *R*[*x*]≠Ø. *x*∈*R*[*x*]

*R* ekvivalence na *X* potom ∀*x*,*y*∈*X*: (*R*[*x*]=*R*[*y*])∨(*R*[*x*]⋂*R*[*y*]=Ø). ⇒ Princip koláče – rozdělení na části

*xRy* – *z*∈*R*[*x*] *zRx* ⇒ *zRy* ⇒ *z*∈*R*[*x*] ⇒ *R*[*x*]⊆*R*[*y*], opačně stejně ⇒ *R*[*x*]=*R*[*y*]

není – Sporem - *R*[*x*]⋂*R*[*y*]≠Ø; *z*∈(*R*[*x*]⋂*R*[*y*]) ⇒ *xRz*∧*zRy* ⇒ *xRy*

Systém množin {*R*[*x*]: *x*∈*X*} tvoří rozklad množiny X - každý prvek patří právě do jedné z mn. {R[x]: x∈X}

Uspořádání: relace na X, která je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická - ∀x,y∈X (xRy&yRx)⇒x=y; (R, ≼)

Zobrazení z X do Y je libovolná relace (*f*⊆*X*×*X*) splňující ∀*x*∈*X* ∃! *y*∈*Y*: *xfy*; *f*:*X*→*Y*; *f*:*x*⟼*y* = *f*(*x*)=*y*

*f*:*X*→*Y*, *g*:*Y*→*Z*, potom *g*∘*f* značíme z *X* do *Z* definované předpisem *g*∘*f*=*g*(*f* (*x*)). (∀*x*∈*X* ∃! *z*∈*Z*: *g*∘*f*(*x*)=*z*

*f*:*X*→*Y* je *prosté/ injekce*, pokud ∀*x*,*y*∈*X*: *x*≠*y* ⇒ *f*(*x*)≠*f*(*y*); *f*:*X*↪*Y*; |*X*|≤|*Y*|

*f*:*X*→*Y* je *na/ surjekce*, pokud ∀*y*∈*X* ∃*x*∈*X*: *f*(*x*)=*y*; *f*:*X*↠*Y*; |*X*|≥|*Y*|

*f*:*X*→*Y* je *vzájemně jednoznačné/ bijekce*, pokud je prosté a na; *f*:*Xsipka_1.bmpY*, *f*:*Xsipka_2.bmpY*; |*X*|=|*Y*|

*Permutace* konečné množiny *X* je libovolná bijekce *p*:*Xsipka_2.bmpX*; *p*=(*b*,*c*,*d*,*a*)

*Faktoriál*: *n*!=1⋅2⋅…⋅*n*; 0!=1

Počet permutací na *n*-prvkové množině je *n* faktoriál. *n* možností, kam zobrazit první prvek…

|*X*|=*n*, |*Y*|=*k*, potom existuje *kn* zobrazení z *X* do *Y*. *k* možností, kam zobrazit první prvek…

*Kombinační číslo*: počet *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové mn..

*Pascalův trojúhelník*: …

*Binomická věta*:

(x+y)⋅(x+y)⋅…(x+y), každý sčítanec tvaru *xn*-*k*⋅*yk* podle toho, z kolika závorek vybereme *y*.

*n*!≤*nn* ; *n*!≈⋅ ; 1+*x*≤*ex* ; ++…+=2*n* ; <<…<=>…> …

*n*⋅*n*⋅…⋅*n* ≤(*n*!)2=(1⋅*n*)⋅[2⋅(*n*-1)]⋅…⋅(*n*⋅1)≤⋅⋅…⋅

Indukce dle *n*: ⇒

; průměr členů, součet členů; složitější…

*Princip inkluze a exkluze*: Jsou-li *A*1,…,*An* konečné množiny, pak =-1)*k*-1 |

…==+-=+-…

*Graf G*: je uspořádaná dvojice (*V*,*E*), kde *V* je libovolná neprázdná konečná množina a *E*⊆

*Úplný graf na n vrcholech*: každá dvojice vrcholů spojena hranou; *Kn*=, kde |*V*|=*n*

*Kružnice*: *Cn*=({*v*1, *v*2, …, *vn*}, {{*v*1, *v*2}, {*v*2, *v*3}, …, {*vn*-1, *vn*}, {*vn*, *v*1 }}), *n*≥3; *délka kružnice*=*n*=|*V*|=|*E*|

*Cesta*: *Pn*=({*v*1, *v*2, …, *vn*}, {{*v*1, *v*2}, {*v*2, *v*3}, …, {*vn*-1, *vn*}}), *n*≥0; |*V*|=*n*+1, |*E*|=*n*

*Prázdný graf*: *En*=(*V*, Ø)

*Úplný bipartitní graf*: *Kn*,*l*=({*v*1, *v*2, …, *vn*, *v*1, *v*2, …, *vl*}, {{*vi*, *vj*}: *i*=1, …, *n* , *j*=1, …, *l*}); |*V*|=*n*+*l*, |*E*|=*n*⋅*l*, *n*,l≥1

*Bipartitní graf*: *G*=(*V*, *E*), *V*=*UW*, *E*⊆{{*u*,*w*}, *u*∈*U*, *v*∈*V*}

*Isomorfismus*: *G*≌*G*‘, pokud existuje bijekce *f*:*V*(*G*)sipka_2.bmp*V*(*G*‘) taková, že {*u*, *v*}∈*E*(*G*)⇔ {*f*(*u*), *f*(*v*)}∈*E*(*G*‘)

*G*‘ je *podgraf grafu G* (*G*‘⊆*G*), pokud (*V*(*G*‘)⊆*V*(*G*))&

*G*‘ je *indukovaný podgraf grafu G* (*G*‘⊆*G*), pokud (*V*(*G*‘)⊆*V*(*G*))&

*Doplněk grafu G*: *G*‘=

*G* je *souvislý*, pokud ∀*x*,*y*∈*V*(*G*) ∃ v *G* cesta z *x* do *y* – značíme *x*∼*Gy* pokud existuje, ∼*G* je ekvivalence

*Sled*: =(*v*0, *e*1, *v*1, *e*2, …, *en*, *vn*), kde *ei*={*vi*-1, *vi*}; nejkratší sled je cesta

Podgrafy indukované třídami ekvivalence se nazývají *komponenty grafu G*

*Vzdálenost v grafu*: délka nejkratší cesty z *u* do *v*  v *G*

*Matice sousednosti grafu*: *AG* *n*×*n*, *V*(*G*)=*n*;

*G* graf, *AG* matice sousednosti; *B*=*AGn*, *bi*,*j*=*k* ⇔ ∃*k* cest z *vi* do *vj* délky *n*

*Tah*: (*v*0, *e*1, *v*1, *e*2, …, *en*, *vn*), *v*∈*V*(*G*), *ei*={*vn*-1, *vi*}, *e*1, *e*2, …, *en* navzájem různě hrany

*Uzavřený tah*: tah, kde *v*0=*vn*

*Eulerovský tah*: uzavřený tah procházající všemi hranami

*Stupeň vrcholu degG(v)*: počet hran z vrcholu vycházejících; každý průchod zvýší počet o 2

*G je Eulerovský*, pokud má alespoň jeden Eulerovský tah

*G* se všemi stupní sudými a alespoň jednou hranou obsahuje kružnici. Budujeme cestu,omezeně *v*…

*G* je Eulerovský ⇔ (*G* je souvislý ∧ stupně všech vrcholů v *G* jsou sudé) ⇒ zřejmé

⇐ existuje rozklad na kružnice; důkaz indukcí – spojíme dvě kružnice…

Kreslení jedním tahem ne nutně uzavřených – právě, když má *G* nejvýše dva vrcholy lichého stupně

0 – umíme; 2 – přidáme hranu mezi dvěma vrcholi lichého stupně (nebo 2 hrany spojené bodem)

*Princip sudosti*: V každé konečném kroku je počet *v* lichého stupně sudý

*Skóre grafu G*=(deg*G*(*v*1), deg*G*(*v*2), …, deg*G*(*vn*)); grafy stejné ⇒ mají stejnou permutaci

*Hamiltonovský graf*: existuje *Hamiltonovská kružnice* – prochází všemi vrcholy bez opakování

*G* je *hranově k-souvislý*, pokud odebráním kterýchkoliv nejvýše *k*-1 hran z *G* dostaneme souvislý graf

*G* je *vrcholově k-souvislý*, pokud odebráním … *k*-1 vrcholů z *G* dostaneme souvislý graf a |*V*(*G*)|≥*k*+1

2 souvislost – *most* ◊-◊, *artikulace* ∞

*G* je 2-souvislý ⇔ každé 2 vrcholy jsou na společné kružnici a |*V*(*G*)|≥2 ⇐ zřejmé

⇒ indukcí – existuje cesta *v*, *vk*-1, *v*‘, kružnice s *v*, *vk*-1 a kružnice s *v*, *vk*-1 ⇒ je i kružnice s *v*, *v*‘

Každý vrcholově 2-souvislý graf je též hranově dva souvislý

Dokážeme –a⇐-b – buď není souvislý nebo 2 vrcholy spojené jen jednou hranou - …

*Strom*: souvislý graf bez kružnic.

*G* je strom (souvislý bez kružnic)

∀*x*,*y* ∃! cesta z *u* do *v*  v *G*

*G* je souvislý, odebráním libovolné hrany souvislý není

*G* je bez kružnic, přidáním libovolné hrany vznikne kružnice

*G* je souvislý a |*E*(*G*)|=|*V*(*G*)|

*v*∈*V*(*G*) je *koncový vrchol (list) G*, pokud deg*G*(*v*)=1

*Lemma o koncovém vrcholu*: Každý strom na ≥2 vrcholech má alespoň 1 list kdyby ne, kružnice

*Tvrzení o postupné výstavbě stromu*: (*G* je strom) ⇔ (*G*-*v*,*v*∈*V*(*G*) je strom) ⇐⇒kružnice,spojitost

*Kostra G*: Podgraf souvislého grafu na množině všech vrcholů *G*, který je stromem

*Problém minimální kostry*: *Ohodnocený graf G=(V, E)+ω* souvislý graf s minimálním ohodnocením

PMK má u souvislého grafu řešení, které je strom. Jinak kružnice ⇒ šla by hrana odebrat

*Hladový/ Kruskalův algoritmus*: Vstup hrany seřazeny podle velikosti, hranu přidáme, nevznikne-li *C*.

Hladový algoritmus najde minimální kostru pro všechny souvislé ohodnocení grafy. Vždy skončí

Porovnání s jinou - 2 množiny hran, přidání nějaké hrany … ???

*Počet koster grafu G*: ϰ(*G*); ϰ(*T*)=1; ϰ(*Kn*)=*nn*-2

Počet *povykosů* (postup výroby kořenového stromu) *N*=ϰ(*Kn*)⋅*n*⋅(*n*-1)! (kořenů⋅očíslování hran)

Orientovaný graf, pokaždé táhneme z nějaké komponenty do jiné a jedna komponenta ubyde  
 *N*=⋅(*n*-*k*-1)=(*n*-1)!⋅*nn*-1 (dáváme *n*-1 šipek, *v* kde skončí ⋅ komponent kde začne)

*Extremální teorie grafů*: *n* vrcholů, kolik maximálně hran

*G* neobsahuje kružnici → strom nebo les; úplný graf na *n* vrcholech má *n*⋅(*n*-1)/2 hran

Pro každé *n*∈ℕ platí *T*(*n*)= (maximální počet hran grafu na *n* vrcholech neobsahující trojúhelník)

≥; ≤ indukcí, skok o 2 – přidané vrcholy můžeme spojit max. s *n* vrcholy + navzájem

*Rovinné kreslení G*: *v* jsou navzájem různé body roviny, *e* jsou neprotínající se čáry spojující body

Graf je *rovinný*, pokud má nějaké rovinné nakreslení

*Oblouk* v rovině je *X*⊆ℝ2 - ∃ spojité prosté zobrazení *f*:[0, 1]→ℝ2

*Topologický rovinný graf*: rovinný graf + nějaké jeho nakreslení

*Stěna nakreslení*: *G* topologický rovinný graf, *x*, *y* body doplňku, existuje-li oblouk neprotínající *G*. *s*

*Jordanova věta o kružnici*: nakreslíme-li do roviny čáru se spojenými konci, dělí rovinu na dva kusy.

Všechna rovinná nakreslení grafu bez kružnic (strom/ les) mají jednu stěnu.

*Eulerův vzorec*: *G*=(*V*,*E*) souvislý rovinný graf, pro všechna rovinná nakreslení platí |*V*|-|*E*|+*s*=2

Indukcí podle počtu hran – možná…

3D konvexní mnohostěny – platónská tělesa dají rovinný graf

*G*=(*V*,*E*) rovinný graf, |*V*|≥3. Potom |*E*|≤3|*V*|-6. Maximální – úplný graf – 3*s*=2|*E*| ⇒ …

*G*=(*V*,*E*) rovinný graf bez kružnic, |*V*|≥3. Potom |*E*|≤2|*V*|-4. *K*4/ *K*5/ hvězda ⇒ …; 2*s*≥|*E*| ⇒ …

V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše pět. Kdyby měly všechny šest, neplatila by ⤴

*Barvení map & grafů*: předpoklady: každý stát souvislý, sousedi spojení hranou; *v* středy, *e* sousedí-li

*G*=(*V*,*E*) lze *řádně obarvit* *k*-barvami, existuje-li zobrazení *b*:*V*→{1, 2, …, *k*} takové, že {*x*,*y*}∈*E*⇒*b*(*x*)≠*b*(*y*)

Χ(*G*)≤5 pro každý rovinný graf. Indukcí podle |*V*| - lze *G*-*v*, deg*G*(*v*)≤5 - nelze-li obarvit *v* pak  
 BÚNO existuje cesta *A*-*C* ⇒ Větev *B*-*D* přebarvíme na *D*-*B* a *v* obarvíme *B*

*Hex*

Nejvýše jeden hráč vybuduje cestu – neexistuje rovinné *K*5.

Alespoň jeden hráč vybuduje cestu – sporem – políčka 1, 2, 3 podle toho kdo se tam dostane – 3 nelze

Při správné strategii vyhraje bílý ale strategii nikdo nezná. Sporem – kdyby černý, inverzní šachovnice

Každá pozice je vyhrávající právě pro jednoho hráče.

*R* ekvivalence na *X* potom ∀*x*∈*X*: *R*[*x*]≠Ø. *x*∈*R*[*x*]

*R* ekvivalence na *X* potom ∀*x*,*y*∈*X*: (*R*[*x*]=*R*[*y*])∨(*R*[*x*]⋂*R*[*y*]=Ø). ⇒ Princip koláče – rozdělení na části

*xRy* – *z*∈*R*[*x*] *zRx* ⇒ *zRy* ⇒ *z*∈*R*[*x*] ⇒ *R*[*x*]⊆*R*[*y*], opačně stejně ⇒ *R*[*x*]=*R*[*y*]

není – Sporem - *R*[*x*]⋂*R*[*y*]≠Ø; *z*∈(*R*[*x*]⋂*R*[*y*]) ⇒ *xRz*∧*zRy* ⇒ *xRy*

Počet permutací na *n*-prvkové množině je *n* faktoriál. *n* možností, kam zobrazit první prvek…

|*X*|=*n*, |*Y*|=*k*, potom existuje *kn* zobrazení z *X* do *Y*. *k* možností, kam zobrazit první prvek…

*Kombinační číslo*: počet *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové mn..

*Binomická věta*:

(x+y)⋅(x+y)⋅…(x+y), každý sčítanec tvaru *xn*-*k*⋅*yk* podle toho, z kolika závorek vybereme *y*.

*n*!≤*nn* ; *n*!≈⋅ ; 1+*x*≤*ex* ; ++…+=2*n* ; <<…<=>…> …

*n*⋅*n*⋅…⋅*n* ≤(*n*!)2=(1⋅*n*)⋅[2⋅(*n*-1)]⋅…⋅(*n*⋅1)≤⋅⋅…⋅

Indukce dle *n*: ⇒

; průměr členů, součet členů; složitější…

*Princip inkluze a exkluze*: Jsou-li *A*1,…,*An* konečné množiny, pak =-1)*k*-1 |

…==+-=+-…

*G* graf, *AG* matice sousednosti; *B*=*AGn*, *bi*,*j*=*k* ⇔ ∃*k* cest z *vi* do *vj* délky *n*

*G* se všemi stupní sudými a alespoň jednou hranou obsahuje kružnici. Budujeme cestu,omezeně *v*…

*G* je Eulerovský ⇔ (*G* je souvislý ∧ stupně všech vrcholů v *G* jsou sudé) ⇒ zřejmé

⇐ existuje rozklad na kružnice; důkaz indukcí – spojíme dvě kružnice…

Kreslení jedním tahem ne nutně uzavřených – právě, když má *G* nejvýše dva vrcholy lichého stupně

0 – umíme; 2 – přidáme hranu mezi dvěma vrcholi lichého stupně (nebo 2 hrany spojené bodem)

*Princip sudosti*: V každé konečném kroku je počet *v* lichého stupně sudý

*G* je 2-souvislý ⇔ každé 2 vrcholy jsou na společné kružnici a |*V*(*G*)|≥2 ⇐ zřejmé

⇒ indukcí – existuje cesta *v*, *vk*-1, *v*‘, kružnice s *v*, *vk*-1 a kružnice s *v*, *vk*-1 ⇒ je i kružnice s *v*, *v*‘

Každý vrcholově 2-souvislý graf je též hranově dva souvislý

Dokážeme –a⇐-b – buď není souvislý nebo 2 vrcholy spojené jen jednou hranou - …

*Strom*: souvislý graf bez kružnic.

*G* je strom (souvislý bez kružnic)

∀*x*,*y* ∃! cesta z *u* do *v*  v *G*

*G* je souvislý, odebráním libovolné hrany souvislý není

*G* je bez kružnic, přidáním libovolné hrany vznikne kružnice

*G* je souvislý a |*E*(*G*)|=|*V*(*G*)|

*Lemma o koncovém vrcholu*: Každý strom na ≥2 vrcholech má alespoň 1 list kdyby ne, kružnice

*Tvrzení o postupné výstavbě stromu*: (*G* je strom) ⇔ (*G*-*v*,*v*∈*V*(*G*) je strom) ⇐⇒kružnice,spojitost

PMK má u souvislého grafu řešení, které je strom. Jinak kružnice ⇒ šla by hrana odebrat

Hladový algoritmus najde minimální kostru pro všechny souvislé ohodnocení grafy. Vždy skončí

Porovnání s jinou - 2 množiny hran, přidání nějaké hrany … ???

*Počet koster grafu G*: ϰ(*G*); ϰ(*T*)=1; ϰ(*Kn*)=*nn*-2

Počet *povykosů* (postup výroby kořenového stromu) *N*=ϰ(*Kn*)⋅*n*⋅(*n*-1)! (kořenů⋅očíslování hran)

Orientovaný graf, pokaždé táhneme z nějaké komponenty do jiné a jedna komponenta ubyde  
 *N*=⋅(*n*-*k*-1)=(*n*-1)!⋅*nn*-1 (dáváme *n*-1 šipek, *v* kde skončí ⋅ komponent kde začne)

*G* neobsahuje kružnici → strom nebo les; úplný graf na *n* vrcholech má *n*⋅(*n*-1)/2 hran

Pro každé *n*∈ℕ platí *T*(*n*)= (maximální počet hran grafu na *n* vrcholech neobsahující trojúhelník)

≥; ≤ indukcí, skok o 2 – přidané vrcholy můžeme spojit max. s *n* vrcholy + navzájem

*Jordanova věta o kružnici*: nakreslíme-li do roviny čáru se spojenými konci, dělí rovinu na dva kusy.

Všechna rovinná nakreslení grafu bez kružnic (strom/ les) mají jednu stěnu.

*Eulerův vzorec*: *G*=(*V*,*E*) souvislý rovinný graf, pro všechna rovinná nakreslení platí |*V*|-|*E*|+*s*=2

Indukcí podle počtu hran – možná…

3D konvexní mnohostěny – platónská tělesa dají rovinný graf

*G*=(*V*,*E*) rovinný graf, |*V*|≥3. Potom |*E*|≤3|*V*|-6. Maximální – úplný graf – 3*s*=2|*E*| ⇒ …

*G*=(*V*,*E*) rovinný graf bez kružnic, |*V*|≥3. Potom |*E*|≤2|*V*|-4. *K*4/ *K*5/ hvězda ⇒ …; 2*s*≥|*E*| ⇒ …

V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše pět. Kdyby měly všechny šest, neplatila by ⤴

Χ(*G*)≤5 pro každý rovinný graf. Indukcí podle |*V*| - lze *G*-*v*, deg*G*(*v*)≤5 - nelze-li obarvit *v* pak  
 BÚNO existuje cesta *A*-*C* ⇒ Větev *B*-*D* přebarvíme na *D*-*B* a *v* obarvíme *B*

*Hex*

Nejvýše jeden hráč vybuduje cestu – neexistuje rovinné *K*5.

Alespoň jeden hráč vybuduje cestu – sporem – políčka 1, 2, 3 podle toho kdo se tam dostane – 3 nelze

Při správné strategii vyhraje bílý ale strategii nikdo nezná. Sporem – kdyby černý, inverzní šachovnice

Každá pozice je vyhrávající právě pro jednoho hráče.