Graf – uspořádaná dvojice dvou množin (V, E), kde V je neprázdná konečná a E je podmnožina množiny uspořádaných dvojic neuspořádaných dvojic z množiny V
Rovinný graf – graf, mající rovninné nakreslení (= konkrétní obrázek); graf lze nakreslit do roviny bez křížení
Cesta – posloupnost (v_0, $\{v_0, v_1\}$, v_1, $\{v_1, v_2\}$, …, v_n), přičemž žádný vrchol ani hrana se neopakuje
Tah – posloupnost (v_0, $\{v_0, v_1\}$, v_1, $\{v_1, v_2\}$, …, v_n), přičemž žádná hrana se neopakuje
Sled – posloupnost (v_0, $\{v_0, v_1\}$, v_1, $\{v_1, v_2\}$, …, v_n), přičemž vrcholy i hrany se mohou opakovat
Kružnice – cesta + hrana $\{v_n, v_0\}$
Souvislost – mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
Komponenta – souvislá podmnožina grafu
Vrcholově 2-souvislý graf – alespoň 3 vrcholy, po odebrání libovolného vrcholu je stále souvislý
Strom – souvislý bez kružnic
Kostra souvislého grafu G - strom, kde $V(K)=V(G)$ a $E(K) \subseteq E(G)$
Minimální kostra grafu – pro grafy s ohodnocenými hranami – suma ohodnocení
Barevnost – Nejmenší počet barev takový, že graf lze tímto počtem barev řádně obarvit
Vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ – komutativita, asociativita (2x), distributivita (2x), nulový, opačný, jednotkový prvek
Lineární závislost – nulový vektor je lineární kombinací ostatních
Dimenze – maximální velikost báze
Báze – maximální lineárně nezávislá množina
Hodnost matice - $\dim(S(A))=\dim(\Re(A))$

$$[c]_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad , A=m \times n, B=n \times p$$

Matice sousednosti A_G – $a_{ij}=1$ když $\{v_i, v_j\}$ je hranou, =0 jinak

$G(V, E)$, $\mathcal{K}_G$ je <u>množina všech kružnic grafu</u> G
$G(V, E)$, $E' \subseteq E$ je <u>Eulerovská množina hran</u>, pokud $G'(V, E')$ má všechny stupně sudé (souvislost nevyžadována)
e grafu $e_1, e_2, \dots, e_m$; a $\forall$ mn. $A \subseteq E$ přiřaďme <u>charakteristický vektor</u> $\mathbf{v}_A=(v_1, \dots, v_m)$, $v_i=1$ když $e_i \in A$, 0 jinak
$C(G)$ <u>množina všech charakteristických vektorů</u> grafu G
<u>Elementární kružnice grafu G vzhledem ke kostře K</u> – kružnice vzniklá přidáním hrany ke kostře
<u>Věta o prostoru kružnic</u>: 1. $\forall$ G: $C(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ dimenze $|E|-|V|+k$; k - #komponent
2. (V, E') lib. kostra grafu, potom elementární kružnice grafu G vzhledem ke kostře (V, E') tvoří bázi $C(G)$
dk: 1. Že to je VP dokážeme, že ukážeme uzavřenost na sčítání, dimenzi dokážeme s pomocí 2.
2. Jsou lineárně nezávisle; generují – vezmeme ty kružnice, kde jsou, součtem kružnice...
<u>Matice incidence</u> – u grafu s n vrcholy a m hranami $(I_G)_{ue}=1$ když $u \in e$, =0 jinak; $I_G \times I_G^T=A_G$+deg na diagonále
<u>Laplaceova matice</u> – u grafu na n vrcholech $(L_G)_{uv}$ = deg u když $u=v$, =-1 když $\{u, v\} \in E$, =0 jinak; =deg-A_G
$L_G^{(u)}$ – Laplaceova matice s vynechaným u-tým řádkem a u-tým sloupcem
Matice incidence orintovaného grafu - $(D_G)_{ue}=1$ když $u \in e$, =0 jinak; $D_G \times D_G^T=L_G$
<u>Lemma</u>: $\vec{G}$ je libovolná orientace grafu G, pak $D_{\vec{G}} \times D_{\vec{G}}^T=L_G$; Dk: rozebrat možnosti...
=> $L_G^{(u)}= D_{\vec{G}}^{(u)} \times \left(D_{\vec{G}}^{(u)}\right)^T$
<u>Lemma</u>: Buď G graf s n vrcholy a n-1 hranami, pak determinant matice vzniklé z D_G vynecháním řádku je z $\{-1, 1\}$ když G strom, =0 jinak; Dk: =0 - lin. záv.; rozvoj dle řádku s v stupně 1, strom => v $\exists$, jen 1/-1
<u>Počet koster pomocí determinantu</u> - $\forall$ $u \in V(G)$, $\forall$ G: det $L_G^{(u)}=\mathcal{K}(G)$ – polynomiální složitost
Dk: det $L_G^{(u)}$=det ($D_{\vec{G}}^{(u)} \times \left(D_{\vec{G}}^{(u)}\right)^T$)=$\sum$det $\left(D_{\vec{G}}^{(u)}\right)_\omega \cdot$ det ${}^\omega\left(D_{\vec{G}}^{(u)}\right)^T$ - což je 1*1 nebo -1*(-1) za každou kostru
<u>Multigraf</u> – Mezi dvojící vrcholů může vést více hran, hrana může vést z vrcholu zpět do něj
<u># koster rekurzivně</u> – $\mathcal{K}(G)=1$ když $|V|=1$, =0 když G nesouvislý, $\mathcal{K}(G\backslash e)$ když e smyčka, jinak $\mathcal{K}(G\backslash e)+\mathcal{K}(G:e)$
Dk: každá hrana tam buď je, nebo není...

<u>Latinský čtverec</u> – Matice $L \in A^{n \times n}$; $|A|=n$, n různých hodnot; v každém řádku i sloupci permutace prvků
LČ jsou <u>ortogonální</u>, pokud $\forall$ $a, b \in A$ $\exists$ i, j: $L_{ij}=a \land L'_{ij}=b$
<u>Věta</u>: Nechť $L_1, L_2, \dots, L_t$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu n => $t \leq n-1$
Dk: První řádek stejný – lze BÚNO -umět dk., v druhém řádku na prvním místě jen n-1 možností ,co dát
<u>Konečná projektivní rovina je množinový systém</u> – (X, $\wp$), X je množina, $\wp$ systém podmnožin množiny X
P0) Existuje čtyřprvková množina Č $\subseteq X$ taková, že $|P \cap Č| \leq 2$ pro $\forall$ $\in$ $\wp$
P1) Každé různé množiny z $\wp$ se protínají právě v jednom bodě
P2) Pro každé dva různé body z X existuje právě jedna množina z $\wp$ taková, že oba body jsou v ní

Lemma: $\forall$ KPR $(X, \wp)$ $\exists$ n (řád roviny):

$\forall P \in \wp : |P|=n+1$ Dk: z P0 $\exists$ v mimo $\forall$ dvojici přímek, každým v přímka => musí mít stejně v

$\forall x \in X: |\{P|x \in P \in \wp\}|=n+1$ Dk: z P0 $\exists$ $P_i \in \wp$ která s jím neprochází => n+1 přímek na P1, P2

$|X|=|\wp|=n^2+n+1$ Dk: Bod, z něj n+1 přímek s ještě n body; přímka, každým bodem ještě n přímek

Věta: $\exists$ KPR(n) <=> $\exists$ n-1 NOLČ(n) Dk: => zřejmé z obrázku - přímka, z A_0 a A_{n+1} souřadnice, zbytek LČ

<= podobné, ale opačná výstavba

Věta: Pokud $n=p^k$, kde p je prvočíslo, pak $\exists$ KPR(n) Dk: přímka + z jednoho v souřadnice, $P_{ab}=(aj+b,j)$

Vytvořující funkce – explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti a_i

Binomická věta: $\forall x, a, b \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n$; $(a+b)^x=\binom{n}{0}a^0b^n+\ldots+\binom{n}{n}a^nb^0$

Obě verze ekvivalentní – $x=b/a$ a vynásobíme a^n Dk: Rovno počtu n-tic vybraných z...

Mocniná řada – $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, kde $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$

Věta: Nechť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je posl. reálných čísel a $\exists k \in \mathbb{R} : |a_n| \le k^n$ pro $\forall n \ge 1$, potom pro $\forall x \in (-1/k, 1/k)$

řada $a(x)=\sum a_i x^i$ konverguje absolutně; $a_n=a^{(n)}(0)/n!$ Bez důkazu

Zobecněná binomická věta: Pro $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$: $\binom{r}{k}=\frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)}{k!}$; $(1+x)^r$ je VF posloupnosti $\binom{r}{i}$

Kružnice procházející všemi vrcholy se nazývá hamiltonovská kružnice; graf s HK je hamiltonovský graf

Tvrzení: Rozhodnout, zda $\exists$ HK je NP-úplné

Věta Diracova: $\forall v \in V(G)$, deg $v \ge n/2$ => G má HK

Oreho: $\forall u \ne v \in V(G)$, deg u+deg $v \ge n$ => G má HK

Chvátalova: $\forall u \ne v \in V(G)$, $\{u, v\} \notin E(G)$: deg u+deg $v \ge n$ => G má HK

Chvátalův uzávěr $[G]$ grafu G konstruujeme: dokud $\exists u \ne v \in V(G)$, $\{u,v\} \notin E(G)$ deg$u$+deg$v \ge n \rightarrow E:=E \cup \{u,v\}$

Tvrzení: Chvátalův uz. je definován jednoznačně. Dk: sporem - 1. v kterém se liší/ pravidla splněna v obou

Věta: G je hamiltonovský <=> $[G]$ je hamiltonovský Dk: => zřejmé

<= očíslujme vrcholy dle kružnice v $G+uv$, mají součet stupňů alespoň n – existují 2 v, že lze přepojit...

TSP – problém obchodního cestujícího – najít v ohodnoceném grafu hamiltonovskou kružnici nejmenší váhy

deg u+deg $v \ge n$

Věta: TSP je NP-úplný Dk: Stejně těžké jako nalezení HK – ohodnoťme e 1, nehrany 2, pokud n => $\exists$

Věta: Pokud ω splňuje Δ-nerovnost, pak $\exists$ 2-aproximační algoritmus (nalezené řešení bude max. dvojnásobné)

Dk: Najdu minimální kostru, uvážím symetrickou orientaci a projdu jedním tahem, pak nahrazuji...

Věta: Graf všechny stupně sudé => $\forall e \in E(G)$ počet HK procházejících jednou hranou je sudý

Dk: Označme vrcholy 1, 2, …, n tak, že uvažovaná $e=\{v_1, v_2\}$, lízátkové grafy, stupeň

Ramseyova věta: $\forall k$ $\exists n=n(k)$: G graf na n vrcholech => G obsahuje K_k nebo nezávislou množinu k vrcholů

Ramseyova věta: $\forall k, l$ $\exists n=n(k, l)$: G na n vrcholech => G obsahuje K_k nebo nezávislou množinu l vrcholů

Dk: indukcí dle součtu $k+l$: $k=l=1$ zřejmé, $n(k, l) \le n(k\text{-}1, l)+n(k, l\text{-}1)$; A s m spojen, s n ne, - jedno $\le n(\ldots)$

Ramseyova věta – dvoubarevná verze: hrany K_n obarveny červeně/ modře ~ jedno hrany, jedno nehrany

Ramseyova věta – vícebarevná verze: $\forall r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ $\exists n=n(k_i)$: K_n obsahuje podgraf K_{ki} celý v i-té barvě

Erdös-Szakerésova věta: $\forall k$ $\exists n=n(k)$: n bodů v obecné poloze => k z nich v konvexní poloze

Dk: $n(3)$ – zřejmé; $n(4)=5$ – konv. obal nemůže být Δ – sporem – dělíme přímkou procházející vnitřními

$k \ge 5$ každou čtveřici barvou dle obalu; $\exists n$: $\exists k$ bodů: každá čtveřice má stejnou barvu – 3 nelze...

Síť je (G, z, s, c) kde $G=(V, E)$ je orientovaný graf, $z \ne s \in V$ a $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

Tok v síti (G, z, s, c) je fce $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ taková, že 1) $\forall e \in E$: $f(e) \le c(e)$; 2) $\forall u \in V \setminus \{z, s\}$: $\sum f(\{u, x\})=\sum f(\{x, u\})$

Velikost toku f je definována jako $\omega(f)=\sum f(zx)-\sum f(xz)=\sum f(xs)-\sum f(sx)$

Řez je libovolná $R \subseteq E$ taková, že $(V, E \setminus R)$ neobsahuje orientovanou cestu z z do s

Elementární řez $S(A, B)$, $V=A \cup B \wedge \{\}=A \cap B$, $z \in A$, $s \in B$ Každý řez má jako podmnožinu elementární řez

$f(X, Y)=\sum f(xy)$, $x \in X$, $y \in Y$

Pozorování: $\forall A, z \in A, s \notin A$: $\omega(f)=f(A, V \setminus A)-f(V \setminus A, A)$ Dk: pro $\forall$ body z A kromě s ($=\omega(f)$)je vtok=výtok

Důsledek: $\forall$ tok f, $\forall$ řez $\check{R}$: $\omega(f) \le c(\check{R})$ Dk: $\omega(f)=f(A, V \setminus A)-f(V \setminus A, A) \le f(A, V \setminus A) \le c(S(A, V \setminus A)) \le c(\check{R})$

Věta: $\forall$ síť: sup $\omega(f)$=inf $c(\check{R})$, ale řezů je jen konečně...

Toky jako LP – max $f(zx_1)+f(zx_2)+\ldots+f(zx_n)-f(x_{n+1}z)-\ldots$ za podmínky $0 \le f(xy) \le c(xy)$

$\mathscr{F} \subseteq \Pi \langle 0, c(e) \rangle$ - omezená množina; φ_u: $\mathbb{R}^{E(G)} \rightarrow \mathbb{R}$; $\omega(f)=\sum f(ux)-\sum f(xu)$ – spojitá => nabývá maxima

Cesta je nenasycená, pokud každá dopředná hrana: $f(e)<c(e)$; a každá zpětná hrana: $f(e)>0$

Pozorování: tok je maximální <=> tok je nasycený Dk: => zřejmé

<= A množina v, kam vede nenasycená cesta, $\forall e \in S(A, V \setminus A)$: $f(e)=c(e)$, $\forall e \in S(V \setminus A, A)$: $f(e)=0$ ...

Věta: Pokud jsou kapacity celočíselné, potom $\exists$ celočíselný maximální tok Dk: Algoritmus ji zachovává

$f:=0$; dokud existuje nenasycená cesta, ze z do s, nasytit ji $f:=f+\varepsilon$; odevzdat f Dk: skončí, nasyceno

Hranový řez v grafu (V, E) – libovolná $F \subseteq E$ taková, že $(V, E \setminus F)$ není souvislý

Vrcholový řez v grafu (V, E) – libovolná $A \subseteq E$ taková, že $(V \setminus A, E \cap (V \setminus A$ nad 2$))$ není souvislý

Hranová souvislost – $K_e(G)=\min\{|F|: F \subseteq E(G)$ je hranový řez$\}$

Vrcholová souvislost – $K_v(G)=\min\{|A|: A \subseteq V(G)$ je vrcholový řez$\}$; $K_v=|V(G)|-1$ pro K_n

G je hranově k-souvislý, pokud $K_e(G)\geq k$

G je (vrcholově) k-souvislý, pokud $K_v(G)\geq k$

Pozorování: $K_e(G)-1\leq K_e(G-e)\leq K_e(G)$ Dk: Zda je/ není v min. Řezu, pozor, je-li jich víc

Tvrzení: $K_v(G)-1\leq K_v(G-e)\leq K_v(G)$ Dk: Uvažme řez G-e, rozpad na komponenty, pokud dvě a e je spojuje...

Věta: $\forall G$: $K_v\leq K_e$ Dk: Indukcí dle #e – nesouvislý; $K_v(G)\leq K_v(G-e)+1\leq K_e(G-e)+1=K_e(G)$ – e z řezu

Přidání ucha ke grafu = přidání cesty mezi vrcholy u a v

Lemma o uších: G je 2-souvislý <=> G lze dostat z kružnice postupným přidáváním uší Dk: <= zřejmé

=> indukcí, buď jsou vrcholy všechny – můžeme přidat lib hranu/ z vrcholu 2 cesty – ucho

Věta – Ford, Fulkerson: Pro graf G, $t \in \mathbb{N}$ platí $K_e(G)\geq t$ <=> mezi každou dvojicí vrcholů t e-disjunktních cest

Dk: <= sporem; $\exists$ menší řez, t hranově disjunktních cest, každá cesta ho protne min. v jedné hraně - spor

=> Symetrickou orientaci, síť, na řezu je maximálním tok => musí být alespoň tolik cest... !!!

Mengerova věta: $K_v(G)\geq k$ <=> $\forall u\neq v \in V(G)$ $\exists k$ vrcholově disjunktních cest z u do v

Dk: <= sporem; $\exists$ menší řez, t vrcholově disjunktních cest, každá cesta ho protne min. v jednom v - spor

=> Symetrickou orientaci, vrchol rozdělíme na dva – vtok a výtok, hrana mezi c=1...

Množinový systém nad X je $\mathcal{M}=(M_i, i \in I)$, kde $M_i \in X$

Systém různých reprezentantů je prostá funkce $f: I\rightarrow M$ taková, že $\forall i \in I$ je $f(i) \in M_i$

Pozorování: f je SRR pro $\mathcal{M}$ <=> $\{f(i), i \in I\}$ je párování v $I(\mathcal{M})$ velikosti $|I|$

Hallova věta: $\mathcal{M}$ má SRR <=> $\forall J \subseteq I$ je $|\bigcup m_i|\geq|J|$ Dk: => zřejmé

<= Sestrojme síť – bipartitní graf + z + s; … !!!

Věta: Nechť $G(A\cup B, E)$ je bipart. graf, kde $E(G)\neq\{\}$ a $\forall x \in A, y \in B$ deg$x\geq$deg$y$ => $\exists$ párování velikosti $|A|$

Dk: Přes Hallovu větu – k_1=min. deg z A, k_2=max. deg z B; $k_1|J|\leq k_2|B(J)|$ => $|J|\leq|B(J)|$

Lemma: Hranice libovolné stěny libovolného nakreslení 2-souvislého grafu je tvořena kružnicí

Dk: Např: z lemmatu o uších

Kuratovského věta: Graf je rovinný <=> neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$ jako podgraf Dk: => zřejmé

<= indš ukce dle vrcholů: G nesouvislý – lze jednotlivé komponenty; K_v=1 tam se nekříží; K_v=2 lze též

$K_v\geq$ $G.e$ je rovinný, v G se dělí do správných úseků, jinak by vzniklo K_5 nebo $K_{3,3}$?!?!?!