Otázky: Je to pravda? (sémantika); Dá se to dokázat? (axiomy, odvozovací pravidla – formální systém)
Vyjadřovací prostředek – jazyk prvního řádu
Proměnné, funkční symboly, predikátové symboly, symboly pro logické spojky, symboly pro kvantifikátory
Jazyk výrokové logiky – výrokové proměnné (prvotní formule), logické spojky, pomocné symboly (závorky)
Formule – každá $p\in P$; jsou-li A, B formule, i $\neg A$, $A\cup B$, $A\&B$, $A\to B$, $A\leftrightarrow B$ jsou také formule; jen konečné
Sémantika VL: Fle VL jsou konstruovány nad množinou P výrokových proměnných, které VL neanalyzuje
Pravdivostní ohodnocení (valuace): VP z P je zobrazení, které každé VP přiřadí pravdivostní hodnotu (0|1)
Je-li dáno pravdivostní ohodnocení v VP, pak každé fli A lze jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu $v(A)$
Říkáme, že formule A je pravdivá při ohodnocení v, je-li $v(A)=1$, jinak je A nepravdivá
Je-li formule A pravdivá při ohodnocení v, říkáme, že v je model A a píšeme $v|=A$
Říkáme, že A je tautologie, je-li pravdivá při každém ohodnocení. Píšeme $|=A$
Množina formulí T je splnitelná, existuje-li PO v takové, že každá fle A z T je pravdivá při ohodnocení v
A je (tautologickým) důsledkem množiny T a píšeme $T|=A$, je-li fle A pravdivá v každém modelu množiny T
Odvozovací pravidlo modus ponens: Jsou-li fle A a $A\to B$ pravdivé při ohodnocení v, pak i B je pravdivá při o. v
Formální systém VL; Jazyk/ redukce jazyka, axiomy, modus ponens, důkazy (z předpokladů), věta o dedukci
Schémata axiomů: Jsou-li A, B, C fle: $A\to(B\to A)$; $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$; $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$
Konečná posloupnost flí A_i je důkazem fle A, je-li $A_n=A$ a A_i je axiom nebo odvozen z předchozích modu ponens
Existuje-li důkaz formule A, říkáme, že A je dokazatelná ve výrokové logice/ A je větou výrokové logiky. $|\text{-}A$
~ důkaz formule A z (množiny předpokladů) T (... nebo prvek T); A je dokazatelná z T
Věta o dedukci: Nechť T je množina formulí a nechť A, B jsou formule, potom $T|\text{-}A\to B$ právě když $T\cup\{A\}|\text{-}B$
Dk: => nechť A_i, $A\to B$ je důkaz $A\to B$ z předpokladů množiny T, pak A, A_i, $A\to B$, B je důkaz B z T, A
<= je-li B_i důkaz B z T, A; indukcí dokážeme $T|\text{-}A\to B_i$, nakonec získáme $T|\text{-}A\to B$; !případ B_i z B_k, B_j
Pomocné věty (pro zrychlení): $|\text{-}A\to A$
$|\text{-}A\to((A\to A)\to A)$ # $|\text{-}(A\to((A\to A)\to A))\to[(A\to(A\to A))\to(A\to A)]$ # $|\text{-}(A\to(A\to A))\to(A\to A)$ # $v1$
$|\text{-}\neg A\to(A\to C)$ $\quad$ $|\text{-}\neg A\to(\neg B\to\neg A)$ # $\neg A|\text{-}\neg B\to\neg A$ # $\neg A|\text{-}A\to B$ # $v2$
$|\text{-}\neg\neg A\to A$ $\quad$ $|\text{-}\neg\neg A\to(\neg A\to\neg\neg\neg A)$ # $\neg\neg A|\text{-}\neg A\to\neg\neg\neg A$ # $\neg\neg A|\text{-}\neg\neg A\to A$ # $\neg\neg A|\text{-}A$ # $v3$
$|\text{-}A\to\neg\neg A$ $\quad$ $|\text{-}\neg\neg\neg A\to\neg A$ # $v4$
$|\text{-}(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ $\quad$ $|\text{-}(\neg\neg A\to A)\to((A\to B)\to(\neg\neg A\to A))$ # $|\text{-}(A\to B)\to(\neg\neg A\to A)$ #
$\neg\neg A, A\to B|\text{-}A$ # $\neg\neg A, A\to B|\text{-}\neg\neg B$ # $A\to B|\text{-}\neg\neg A\to\neg\neg B$ # $A\to B|\text{-}\neg B\to\neg A$ # $v5$
$|\text{-}A\to(\neg B\to\neg(A\to B)$ $\quad$ $A, A\to B|\text{-}B$ # $A|\text{-}(A\to B)\to B$ # $A|\text{-}\neg B\to\neg(A\to B)$ # $v6$
$|\text{-}(\neg A\to A)\to A$ $\quad$ $|\text{-}\neg A(\neg A\to\neg(\neg A\to A))$ # $\neg A|\text{-}\neg A\to\neg(\neg A\to A)$ # $\neg A|\text{-}\neg(\neg A\to A)$ # $|\text{-}\neg A\to\neg(\neg A\to A)$ # $v7$
Množinu všech flí dokazatelných z T značíme $Con(T)=\{A|T|\text{-}A\}$; $T\subseteq Con(T)$; $Con(Con(T))=Con(T)$;
$T\subseteq S$ => $Con(T)\subseteq Con(S)$; je-li T bezesporná, pak i $Con(T)$ je bezesporná.
Množina T výrokových formulí je sporná, je-li možné z ní dokázat libovolnou fli, jinak je mn. T bezesporná
Množině T se někdy říká teorie
T je maximální bezesporná množina, je-li bezesporná a neexistuje bezesporná T', různá od T a obsahující T
Věta o důkazu sporem: Pro každou fli A platí $T|\text{-}A$ právě když $T\cup\{\neg A\}$ je sporná množina
Dk: => $T|\text{-}A$, $T|\text{-}A(\neg A\to B)$ # $T|\text{-}\neg A\to B$ # $T, \neg A|\text{-}B$; <= $T, \neg A|\text{-}A$ # $T|\text{-}\neg A\to A$ # $T|\text{-}(\neg A\to A)\to A$ # $T|\text{-}A$
Lindenbaumova věta: Každou bezespornou množinu flí T lze rozšířit do maximální bezesporné množiny S
Dk: Seřaďme všechny fle jazyka do A_i a přidejme k T, bude-li bezesporná, že S není sporná sporem + indukcí
Že je maximální, uvažme S' bezespornou, $S\subseteq S'$, ale ta nemůže obsahovat žádnou fli navíc...
Věta o bezespornosti a splnitelnosti: T množina flí výrokové logiky, T je bezesporná, právě když je splnitelná.
Dk: <= $v|=T$, uvažme A_i dk fle A, platí $v|=A_i$, tedy $\forall$ fle dokazatelná z T je pravdivá při v, $v|\neq p\&\neg p$ => bezes.
=> Rozšiřme T do S, vezměme v, $v(p)=1$ <=> $p\in S$ => je i modelem T. $A\in S$ <=> $v|=A$ – indukcí dle slož.
Věta o úplnosti: Je-li T množina flí, A fle, potom platí $T|\text{-}A$ právě když $T|=A$ a $|=A$ právě když $|=A$.
Dk: Víme, že $T|\text{-}A$ právě když $T\cup\{\neg A\}$ je sporná; právě když $T\cup\{\neg A\}$ je nesplnitelná; právě když $T|=A$
Důsledek: Výroková logika je bezesporná. Dk: Z věty o úplnosti, ve VL jsou dokazatelné právě tautologie.
Věta o kompaktnosti: Množina formulí T je splnitelná, právě když je splnitelná každá konečná podmn. mn. T
Dk: => splnitelná → i každá část; <= není splnitelná → sporná, ale důkaz sporu užívá jen konečnou podmn.
Věta: Je-li $T|=A$, pak existuje konečná podmnožina T', taková, že $T'|=A$. **Dk**: $T|=A$ <=> $T|\text{-}A$ <=> $T'|\text{-}A$ <=> $T'|=A$
$|\text{-}(A\&B)\to A$; $|\text{-}A\to(B\to(A\&B))$; $|\text{-}(A\leftrightarrow B)\to(A\to B)$; $|\text{-}(A\to B\&B\to A)\to A\leftrightarrow B)$; $|\text{-}A\leftrightarrow B$ => $|\text{-}A$ <=> $|\text{-}B$
$|\text{-}A\leftrightarrow(A\&A)$ (idempotence); $|\text{-}(A\&B)\leftrightarrow(B\&A)$ (komutativnost); $|\text{-}((A\&B)\&C)\leftrightarrow(A\&(B\&C))$ (asociativnost)
-,,-; $|\text{-}A\to(A|B)$ (monotonnost); $|\text{-}(A|(B\&C))\leftrightarrow((A|B)\&(A|C))$, ... (distributivnost); $|\text{-}(A\to(B\to C))\leftrightarrow((A\&B)\to C)$
Věta o ekvivalenci: A' vznikne z fle A nahrazením něk. výskytů podflí A_i flemi A_i'. Je-li $|\text{-}A_i\leftrightarrow A'$, pak $|A\leftrightarrow A'$
Dk: Indukcí dle složitosti, zda proměnná/ negace v5/ implikace $|\text{-}(B'\to B)\to((B\to C)\to(C\to C')\to(B'\to C'))$ ...

Lemma o důkazu rozborem případů: T množina flí, A, B, C fle, potom T, $(A|B)|-C$ právě když $T, A|-C$ a $T, B|-C$
Normální tvary výrokových formulí: VP, literály (VP, ¬VP), klauzule (L|L), CNF (K&K), DNF ((L&L)|(L&L))
Věta o normálních tvarech: Ke každé fli A lze sestrojit formule A_k, A_d v CNF, DNF, tak, že $|-A\leftrightarrow A_k$, $|-A\leftrightarrow A_d$

Termy popisují individua (proměnná, funkce na termech – konečné použití pravidla)
Formule: tvrzení o individuích (predikátový symbol – atomická fle, logická spojka, kvantifikátory na nich)
Výskyt proměnné ve formuli A je vázaný, je li součástí podformule $\exists xB$ nebo $\forall xB$, jinak je výskyt volný
Formule je otevřená, neobsahuje-li vázanou proměnnou; Formule je uzavřená, neobsahuje-li volnou proměnnou
Sémantika: interpretace je definována množinovou relační strukturou M - množina individuí, zobrazení, relace
(Pozměněné ohodnocení $e(x/m)(y)$ - $=m$, když $y\equiv x$ a $e(y)$ jinak)
Tarského definice pravdy: Říkáme, že formule A je splněna ve struktuře M při ohodnocení e ($M|=A[e]$)
$A\equiv p(t_i)$ pak $M|=A[e]$ jestliže $(t_i[e])\in p_M$; $\equiv t_1=t_2$ a $t_1[e]=t_2[e]$; $\equiv\neg B$ a $M|\neq B[e]$; $\equiv B\rightarrow C$ a $M|\neq B[e]$ nebo $M|=C[e]$
$\equiv\forall xB$ a $M|=B[e(x/m)]$ pro každé m z M; $\equiv\exists xB$ a $M|=B[e(x/m)]$ pro nějaké m z M
Formule je pravdivá v M ($M|=A$), je-li A splněna v M při každém ohodnocení
Formule je logicky platná, je-li pravdivá při každé interpretaci daného jazyka ($|=A$ <=> $M|=A$ pro všechna M)
Term t je substituovatelný do formule A za proměnnou x, jestliže pro každou proměnnou y z t žádná podformule $\exists yB$, $\forall yB$ fle A neobsahuje volný výskyt proměnné x. ($A_{x,y,\dots}[t, s, \dots]$ - jen je-li substituovatelná)
$t_{x1,x2,\dots}[t_1, t_2, \dots][e]=t[(e/m_1), (e/m_2), \dots]$; $M|=A_{x1,x2,\dots}[t_1, t_2, \dots][e]$ právě když $M|=A[(e/m_1), (e/m_2), \dots]$
Redukce jazyka: Jen negace a implikace; univerzální kvantifikátor základní, $\exists xA\equiv\neg\forall x\neg A$
Sche. specifikace: $\forall xA\rightarrow A_x[t]$; S. přeskoku: $\forall x(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall xB)$ – x není volná v A; P. generalizace: $A\rightarrow\forall xA$
Pravidlo zavedení $\forall$: x nemá volný výskyt v A a $|-A\rightarrow B$ potom $|-A\rightarrow\forall xB$; ...; Pravidlo substituce $A_x[t]\rightarrow\exists xA$
Instance formule: Dosadím za proměnné (musí jít substituovat)...
Věta o instancich: Je-li A' instance, pak A $|-A$ => $|-A'$ **Dk**: $|-A$ => $|-\forall xA$ => $|-\forall xA\rightarrow A_x[t]$ => $|-A_x[t]$
Uzávěr formule: $\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_nA$, x_i volná v A; všechny ekvivalentní; Je-li A' uzávěr A, pak $|-A$ právě když $|-A'$
Věta o distribuci kvantifikátorů: $|-A\rightarrow B$ pak $|-\forall xA\rightarrow\forall xB$ a $|-\exists xA\rightarrow\exists xB$
Dk: $|-A\rightarrow B$, $\forall xA\rightarrow$A => $|-\forall xA\rightarrow B$ => …; …
Věta o ekvivalenci: Nechť A' vznikne z A nahrazením některých výskytů B_i. Pokud $|-B_i\leftrightarrow B_i'$, pak $|-A\leftrightarrow A'$
Dk: obdobný + $\forall xB$ – $A\rightarrow B$, $B\rightarrow B'$, $B'\rightarrow A'$ a naopak
Formule A' je variantou formule A: vznikne-li postupným nahrazením QxB za $QyB_x[y]$, y není volná v B
Věta o variantách: Je-li A' variantou A, pak $|-A\leftrightarrow A'$ **Dk**: $\forall xB\rightarrow B_x[y]$ + $B_x[y]\rightarrow\forall yB_x[y]$; označme $B_x[y]$ C...
Věta o dedukci: $T|-A\rightarrow B$ právě když $T,A|-B$ **Dk**: obdobný až na $B_i\equiv\forall xB_j$; z indukce $T|-A\rightarrow B_j$ => $T|-A\rightarrow\forall xB_j$
Jazyk L' je rozšířením L, je li každý symbol z L i v L'
teorie T' je rozšířením T, je-li L' rozšířením L a axiomy T jsou i v T'; konzervativní rozšíření: $T'|-A$ => $T|-A$.
Věta o konstantách: vznikne-li L' z L rozšířením o konstanty c_i, pak $T|-_{L'}Ax_i[c_i]$ právě když $T|-_LA$
Dk: <= je instancí A; => Důkaz $Ax_i[c_i]$ přeměňme na důkaz $Ax_i[y_i]$ – že se to tvoří stejně... tedy to je instance
Důsledek: A' uzávěr A, potom $T|-A$ <=> $T,\neg A'$ je sporná **Dk**: => $T|-A$ -> $T|-A'$; <= sporná -> $T,\neg A|-A$ -> $T|-A'$
Prenexní tvar formule: $A\equiv Q_ix_iB$, A je otevřené jádro, posloupnost před je prefix; ke každé fli jde sestrojit
Predikátová logika s rovností: Axiom identity $x=x$; axiom rovnosti pro funkce $x_1=y_1\rightarrow\dots\rightarrow x_n=y_n\rightarrow f(x_i)=f(y_i)$
axiom rovnosti pro predikáty $x_1=y_1\rightarrow\dots\rightarrow x_n=y_n\rightarrow f(x_i)\rightarrow p(y_i)$; reflexivní, symetrická, tranzitivní
Základní věta o rovnosti: Je-li $T|-t_i=s_i$,... pak $T|-t=s$ $T|-A'=A$ kde v t/ A jsme nahradili t_i za s_i...
T je teorie prvního řádu s jazykem L, formule z T speciální axiomy teorie T, M je modelem teorie T, formule A je sémantickým důsledkem teorie T
elem. arit.: {0, S, +, *}; $S(x)\neq0$, $S(x)=S(y)\rightarrow x=y$, $x\neq0\rightarrow\exists y(S(y)=x)$, $x+0=x$, $x+S(y)=S(x+y)$, $x*0=0$, $x*S(y)=x*y+x$
Věta o korektnosti: $T|-A$ => $T|=A$
Věta o úplnosti: $T|-A$ právě když $T|=A$; T bezesporná právě když má model
T je úplná teorie, je-li bezesporná a pro libovolnou uzavřenou A jazyka L je A nebo $\neg A$ dokazatelná v T
T je Henkinova teorie, jestliže pro libovolnou uzavřenou fli tvaru $\exists xB$ existuje konstanta c t.ž. $T|-\exists xB\rightarrow B_x[c]$
Věta: Ke každé teorii lze sestrojit konzervativní rozšíření T_H, které je Henkinovskou teorií
Věta Lindenbaumova: Každou bezespornou T lze rozšířit do úplné S se stejným jazykem jako T.
Věta o kompaktnosti: T má model <=> každý konečný fragment $T'\subseteq T$ má model **Dk**: Obdobný
Důsledek: $T|=A$ <=> $T'|=A$ pro nějaký konečný fragment $T'\subseteq T$ **Dk**: Dle věty o úplnosti, důkaz jen konečný
Robinsonova aritmetika Q: Elementární aritmetika + $x\leq y\leftrightarrow\exists z(z+x=y)$
Peanova aritmetika *P*: Robinsonova bez $x\neq0\rightarrow\exists y(S(y)=x)$ + schema indukce $A_x[0]\rightarrow(\forall x(A\rightarrow A_x[S(x)])\rightarrow\forall xA)$
Úplná aritmetika *Th*: axiomy jsou všechny uzavřené formule pravdivé ve standartním modelu aritmetiky